

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

14. Band, Heft 5 UND IHRE GRENZGEBIETE

S. 193—240

Grundlagenfragen, Philosophie, Logik.

● **Gonseth, Ferdinand:** *Les mathématiques et la réalité. Essai sur la méthode axiomatique.* (Bibl. de philos. contemporaine.) Paris: Felix Alcan 1936. XI, 386 pag. Frs. 30.—.

Die Bedeutung dieses Buches liegt vorwiegend auf philosophischem Gebiet. Da aber heute in der Grundlagenforschung philosophische und mathematische Probleme eng ineinander greifen, geht das vorliegende Buch jedenfalls auch diejenigen Mathematiker an, die sich für die Grundlagen ihrer Wissenschaft interessieren. — Die Begriffe der elementaren Geometrie haben alle die Eigentümlichkeit, daß sie nirgends in der physikalischen Welt genau realisiert sind und trotzdem einen anschaulichen Gehalt haben, weil sie ja aus der Anschauung der Wirklichkeit abstrahiert sind. Auch die Sätze der Geometrie gelten in der physikalischen Welt nur in summarischer Weise. Gonseth nennt deshalb das Lehrgebäude der elementaren Geometrie ein Schema. Der Raum der Anschauung wird als Realisierung oder äußere Bedeutung (*signification extérieure*) des Schemas bezeichnet. Im Verhältnis zu ihm ist das Schema abstrakt. Aber auf einer höheren Stufe kann nun dieses Schema wieder ein Konkretum werden, zu dem ein neues abstraktes Schema gebildet wird. Im Falle der Geometrie ist dies die axiomatische Geometrie, wie sie z. B. in dem Axiomensystem Hilberts vorliegt. Dieser Übergang von der elementaren zur axiomatischen Geometrie gilt dem Verf. als Typus der Schematisierung. Die axiomatische Methode ist le bréviaire de l'abstraction. Das Axiomensystem beschreibt das zugehörige Konkretum nur in summarischer Weise, es kann ergänzt werden (ist stets im Werden), es hat eine eigene innere Struktur und eine äußere Bedeutung. Alle diese Charakterzüge findet der Verf. an zahlreichen Schematen in anderen Wissenschaftsbezirken wieder. — Während nun der schematische Charakter etwa der elementargeometrischen Begriffe jedem Mathematiker geläufig ist, wird er in anderen Fällen häufig übersehen. Ein Beispiel bildet der Wahrheitsbegriff der Logik. Dieser ist das Schema der praktischen Wahrheit des täglichen Lebens. Viele Mathematiker und Philosophen behandeln ihn aber in naiver und unkritischer Weise als einen absoluten. Diese vom Verf. als „vorkritisch“ bezeichnete Tendenz, dem Schema eine absolute Gültigkeit und eine eigene Existenz in einem Reich der Ideen zuzuschreiben, wird an zahlreichen Beispielen besonders in der Logik aufgezeigt. Durch Nichtbeachtung des schematischen Charakters gewisser Begriffe entstehen auch zahlreiche Paradoxien. Die bekannten Antinomien der Logik und der Mengenlehre versucht der Verf. gleichfalls auf diese Weise zu erklären und aufzulösen. Der Ref. hat sich allerdings nicht davon überzeugen können, daß dieser Versuch wirklich gelungen wäre. In diesem Zusammenhang wird auch an der Lehre der Principia Mathematica von Whitehead und Russell eine ziemlich scharfe Kritik geübt. Sie erscheint dem Ref. nicht ganz berechtigt, zumal der Verf. in diesem Falle im Gegensatz zu seiner sonstigen umfassenden Literaturkenntnis aus zweiter Hand zu schöpfen scheint. Mit Brouwers Intuitionismus setzt sich Gonseth gleichfalls in interessanter Weise auseinander. Streicht man, so meint er, aus dem Intuitionismus die vorkritische Ansicht von der Existenz der absoluten Wahrheit, die Brouwer mit der orthodoxen Mathematik teilt, so erweist sich der Intuitionismus als eine fruchtbare Methode, die allerdings mit der gleichfalls von jenem Vorurteil gereinigten orthodoxen Mathematik nicht mehr in einem unüberbrückbaren Gegensatz steht. — Im ganzen rückt das sehr lebendig geschriebene Buch Gonseths viele Tatsachen der Wissenschaft in eine neue und interessante Beleuchtung und kann dadurch zu einer heilsamen Auflockerung eingewurzelter Vorurteile dienen.

Kurt Grelling (Berlin).

● **Emch, Arnold F.:** *Implication and deducibility.* J. Symbolic Logic 1, 26—35 (1936).

Lewis und Langford (Symbolic Logic pp. 248—252) ground their conviction that strict implication (\prec) is synonymous with deducibility on the assumption, that every impossible proposition is expressible in the form $p \sim p$; the author argues that this is not the case. Moreover, for a set of postulates in mathematics it is required to be both independent and consistent; in Lewis' system this is impossible, if the postulates are necessarily true propositions, while the consistence of p and q is given by $\sim(p \prec \sim q)$, and q 's independence of p by $\sim(p \prec q)$. In order to avoid these difficulties, the author introduces the idea of consistency $\circ p$, which is weaker than possibility $\diamond p$, so that we may claim that every inconsistent proposition be expressible

as $p \sim p$. "Logical implication" is defined as follows: $p \approx q. = \sim O(p \sim q)$; a set of postulates is given, based on the six primitive ideas (1) propositions p, q, r , etc., (2) negation, (3) logical product, (4) possibility, (5) logical consistency, (6) logical equivalence, and chosen in such a way that logical implication gets the properties of the relation of deducibility. The postulates allow to develop a "calculus of logical implication", which contains the calculus of strict implication, in the same way as the latter contains the calculus of material implication. *A. Heyting* (Enschede).

Kalmár, László: Über die Axiomatisierbarkeit des Aussagenkalküls. *Acta Litt. Sci. Szeged* **7**, 222—243 (1935).

Es wird ein Axiomensystem des gewöhnlichen Aussagenkalküls angegeben und gezeigt, daß die zwei Begriffe „identisch wahr“ [Hilbert-Bernays, *Grundl. der Math.* **1**, 54 (1934)] und „aus den angegebenen Axiomen ableitbar“ zusammenfallen. Der Beweis benutzt keineswegs die Idee der konjunktiven Normalform, aber er hängt vom Deduktionstheorem (Hilbert-Bernays, a. a. O. S. 155), das einfach mitbewiesen wird, wesentlich ab. Das angegebene Axiomensystem umfaßt 16 Axiome, ist also wohl nicht das einfachste; aber der Verf. hebt hervor, daß seine Axiome in vielen Fällen, wo ein eleganteres Axiomensystem vorliegt, leicht als Lehrsätze abgeleitet werden können, so daß er wirklich eine neue Beweismethode angegeben hat, welche zur Herleitung eines analogen Ergebnisses in bezug auf ein beliebiges Axiomensystem des Aussagenkalküls dienen kann. *H. B. Curry* (State College, Pa.).

Kleene, S. C.: General recursive functions of natural numbers. *Math. Ann.* **112**, 727—742 (1936).

The author is concerned with a very general definition of recursiveness which, in its essentials, is due jointly to Herbrand and Gödel, and was presented by the latter in lectures at Princeton in 1934. According to this definition a function $f(x_1, \dots, x_n)$ is defined recursively by a set of equations when for each set of numerical values of x_1, x_2, \dots, x_n one and only one equation of the form $f(x_1, \dots, x_n) = y$ is deriveable from the set according to rules which are precisely specified. The ordinary type of recursion (see, e.g. Gödel, this Zbl. **2**, 1), here referred to as primitive recursion, is included as a special case; so also are the multiple, non-primitive, recursions of Ackermann (*Math. Ann.* **99**) and Péter (this Zbl. **11**, 3). The author proves that if $f(x_1, \dots, x_n)$ is a recursive function in the generalized sense, then there exist two primitive recursive functions $\psi(y)$ and $\varrho(x_1, \dots, x_n, y)$, where ϱ has the property that $(x_1, \dots, x_n)(Ey) [\varrho(x_1, \dots, x_n, y) = 0]$, such that $f(x_1, \dots, x_n) = \psi(\varepsilon y [\varrho(x_1, \dots, x_n, y) = 0])$; and, conversely, if $\varrho(x_1, \dots, x_n, y)$ is (general) recursive, and if $(x_1, \dots, x_n)(Ey) [\varrho(x_1, \dots, x_n, y) = 0]$ holds, then $\varepsilon y [\varrho(x_1, \dots, x_n, y) = 0]$ is recursive also. The methods of proof are akin to those of Gödel (l. c.); and the author exhibits, incidentally, a number of interesting recursive functions which enumerate certain classes of formulas. In the second part of the paper the author gives several examples of non recursive functions. For example he shows, by a diagonal process, that the set of all systems of equations which define recursive functions is not enumerable by a recursive function; that there are classes which can be recursively enumerated but nevertheless are such that there is no recursive function $\tau(x)$ which is 0 or 1 according as x is or is not in the class, and indeed that such a class may be defined by a predicate $(Ey) [\sigma(x, y) = 0]$ where $\sigma(x, y)$ is primitive recursive; and that for arbitrary recursive $\sigma(x, y)$ the problem of determining whether or not $(x)(Ey) [\sigma(x, y) = 0]$ is a special case of the problem of determining which systems of equations define recursive functions of one variable. These considerations also show that there exist unentscheidbar propositions in mathematical logics satisfying certain conditions. [Cf. also Church, this Zbl. **14**, 98 and the author's own abstract, *Bull. Amer. Math. Soc.* **41**, 489 (1935).] *H. B. Curry*.

McKinsey, J. C. C.: Reducible Boolean functions. *Bull. Amer. Math. Soc.* **42**, 263 bis 267 (1936).

This paper concerns functions whose independent and dependent variables take

values belonging to a Boolean Algebra. The principal theorem is as follows: a necessary and sufficient condition that a function $f(x_1, \dots, x_n)$ be expressible in the form $g(x_1, \dots, x_p) \oplus h(x_q, x_{q-1} \dots x_n)$, with $q \leq p + 1$, is that

$f(x_1, \dots, x_{q-1}, z_q, \dots, z_p, x_{p+1}, \dots, x_n) \oplus f(y_1, \dots, y_{q-1}, z_q, \dots, z_p, y_{p+1}, \dots, y_n)$
 $= f(x_1, \dots, x_{q-1}, z_q, \dots, z_p, y_{p+1}, \dots, y_n) \oplus f(y_1, \dots, y_{q-1}, z_q, \dots, z_p, x_{p+1}, \dots, x_n)$
 identically, \oplus being any one of the four operations sum, product, symmetric difference (as defined by Stone, this Zbl. 11, 51), or the dual of the last. Some generalizations are indicated at the close.

H. B. Curry (State College, Pa.).

Russell, Bertrand: On order in time. Proc. Cambridge Philos. Soc. 32, 216—228 (1936).

In der vorliegenden Arbeit werden Überlegungen weitergeführt, die vom Verf. („Our Knowledge of the External World“, 1914, Kap. IV) und von N. Wiener [A Contribution to the Theory of Relative Position; Proc. Cambridge Philos. Soc. 17, 441—449 (1914)] entwickelt worden sind. Es handelt sich um die Aufgabe, eine formal strenge Konstitution einiger auf die physikalische Zeitordnung bezüglicher Begriffe wie „Augenblick“ (physikalischer Zeitpunkt), „zeitlich früher (mit Bezug auf Augenblicke)“ u. a. mit logistischen Mitteln durchzuführen und die formalen Eigenschaften der so definierten Begriffe zu bestimmen. — Die Basis seines Aufbaus wählt Verf. auf Grund seiner erkenntnistheoretischen Anschauung, daß Augenblicke mathematische Konstruktionen, nicht physische Gebilde seien, und daß sie daher als Klassen von Ereignissen mit gewissen formalen Eigenschaften darzustellen seien. — Die formale Konstruktion stützt sich auf eine einzige im System undefinierte Grundrelation P , die anschaulich als die Relation des vollständigen Vorausgehens eines Ereignisses mit Bezug auf ein zweites interpretiert werden kann. $S = \div P \div \check{P}$ ist dann die Relation der mindestens teilweisen zeitlichen Überdeckung zweier Ereignisse und $S|P$ diejenige des früheren Beginns eines ersten Ereignisses mit Bezug auf ein zweites. — Über die Grundrelation P werden folgende Voraussetzungen gemacht: P ist eine Reihe (d. h. irreflexiv und transitiv); $S|P$ ist transitiv. — Nun werden folgende Definitionen aufgestellt: Unter der Dauer eines Ereignisses wird die Klasse aller zu ihm in S stehenden Ereignisse verstanden. Eine Ereignisklasse wird ein Augenblick genannt, wenn sie identisch ist mit dem Durchschnitt der Dauern ihrer Elemente. Ein Augenblick heißt früher als ein zweiter, wenn ein Element des ersten in P zu einem Element des zweiten Augenblicks steht. — Es wird bewiesen, daß die zuletzt definierte Relation eine Reihe ist und daher mit Sinn zur Festlegung einer Zeitordnung der Augenblicke verwandt werden kann, und es werden hinreichende Bedingungen für ihre Dichtheit angegeben. Ferner werden notwendige und hinreichende Kriterien dafür aufgestellt, daß ein Ereignis einen ersten bzw. einen letzten Augenblick besitzt, und schließlich verschiedene hinreichende Bedingungen dafür, daß es überhaupt Augenblicke gibt; eine dieser hinreichenden Bedingungen ist die, daß die Menge aller Ereignisse durch P wohlgeordnet wird.

C. G. Hempel (Brüssel).

Guye, Ch.-Eug.: Les frontières de la physique et de la biologie. IV. Arch. Sci. Physiques etc. 18, 154—171 (1936).

III. s. dies. Zbl. 13, 234.

Algebra und Zahlentheorie.

Palamà, Giuseppe: Sulle relazioni che legano i termini di una successione con quelli di altre particolari successioni dedotte per differenza dalla data, e su alcuni determinanti di Hankel. Ist. Lombardo, Rend., II. s. 69, 198—202 (1936).

Specht, Wilhelm: Zur Theorie der Matrizen. Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. 46, Abt. 1, 45—50 (1936).

Two $m \times n$ matrices A and B are unitarily equivalent if unitary matrices U and V exist so that $UAV = B$. It is shown that A and B are unitarily equivalent if and

only if the hermitian matrices AA^* and BB^* are similar, and that the diagonal normal form for A has as its non-zero diagonal elements the positive square roots of the non-zero characteristic roots of AA^* . These results are known for A square and non-singular. Similar theorems are given for orthogonal matrices. *MacDuffee* (Madison).

Williamson, J.: On the equivalence of two singular matrix pencils. *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, II. s. 4, 224—231 (1936).

Let $rA + sB$ be a singular matrix pencil of n rows and n' columns. Turnbull (this Zbl. 10, 387) gave a direct method for determining the smallest (Kronecker) minimal row (column) index and the number of such equal to it. The author extends these results to show how all minimal indices may be determined. Let

$$M_1 = [AB], \quad M_2 = \begin{bmatrix} A & B & O \\ O & A & B \end{bmatrix}, \dots, \quad N_1 = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}, \quad N_2 = \begin{bmatrix} A & O \\ B & A \\ O & B \end{bmatrix}, \dots$$

Let q_i and q'_i denote the ranks of M_i ($i = 1, \dots, n$) and N_i ($i = 1, \dots, n'$) resp. Define $\mu_i = in - q_i$, $\mu'_i = i n' - q'_i$. Then the number of minimal row indices having the value k is $\mu_{k+1} + \mu_{k-1} - 2\mu_k$ and similarly for column indices. Thus two singular pencils are equivalent if and only if they have the same invariant factors and the same q_i and q'_i . *MacDuffee* (Madison).

Motzkin, Th.: On vanishing coaxial minors. *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, II. s. 4, 210—217 (1936).

If all coaxial minors of order $< n - m$ of a square matrix A of order $n > 3m$ vanish, an upper bound for the number of non-zero coaxial minors of order $n - m$ of A is 2^m . Let M be a coaxial minor of order m of A , M_- a given coaxial first minor of M , and let $+$ denote simple coaxial bordering. If all $|M_- +| \neq 0$ while all $|M_- + +|$ and $|M^{++}|$ vanish, the rank of A is m . A theorem of Metzler (this Zbl. 19, 386) is shown by an example to be incorrect. In this example $m = 2$ should read $m = 3$.

MacDuffee (Madison).

Blumenthal, Leonard M.: New theorems and methods in determinant theory. *Duke math. J.* 2, 396—404 (1936).

Ein halbmetrischer Raum S (d. h. eine Menge mit positivem, symmetrischem Abstand zwischen je zwei verschiedenen Elementen) heißt metrisch charakterisiert, wenn notwendige und hinreichende Bedingungen metrischer Natur dafür angegeben sind, daß ein halbmetrischer Raum abstandstreu in S eingebettet werden kann. Metrisch charakterisiert sind bisher: der n -dimensionale euklidische Raum (Menger, *Math. Ann.* 100, 75—163; *Amer. J. Math.* 53, 721—745; dies. Zbl. 3, 21), der n -dimensionale sphärische Raum (Klanfer, *Erg. math. Kolloqu.* 4, 43—45; Blumenthal, *Amer. J. Math.* 57, 51—61; dies. Zbl. 6, 418 u. 10, 378), der n -dimensionale hyperbolische Raum (Blumenthal, *Bull. Amer. Math. Soc.* 41, 485). Diese Untersuchungen werden nun vom Verf. benutzt zum Beweis einiger Sätze über symmetrische Determinanten, bei denen es im wesentlichen darauf ankommt, daß aus dem Verhalten aller oder bestimmter Hauptminoren geschlossen wird auf das Verhalten (vor allem auf das Verschwinden) der Determinante selbst. 2 Beispiele: a) Wenn die Determinante $H = |r_{ij}|$, wo $r_{ij} = r_{ji}$ und $r_{ii} = 1$ ist, eine Ordnung $m > n + 3$ hat und 1. für jedes $1 \leq k \leq n$ jeder Hauptminor der Ordnung $k+1$ verschwindet oder das Vorzeichen $(-1)^k$ hat und 2. jeder Hauptminor der Ordnung $n+2$ verschwindet, so verschwindet H . b) Hat die Determinante $H = |r_{ij}|$, wo $0 \leq r_{ij} = r_{ji} < 1$ und $r_{ii} = 1$ ist, eine Ordnung $m > 4$ und ist jeder dreireihige Hauptminor von H gleich 0, so verschwindet H . *Nöbeling* (Erlangen).

Petterson, Erik L.: Über die Irreduzibilität gewisser ganzzahliger Polynome. *Math. Z.* 41, 319—329 (1936).

Verf. stellt einige neue Irreduzibilitätskriterien für ganzzahlige Polynome auf, indem er diese Polynome modulo einer Primzahlpotenz betrachtet. Unter diesen

Kriterien ist folgendes (Satz 3) leicht zu formulieren: Ist $f(x) = g(x) \prod_{v=1}^n (x - a_v) + b$, und sind d_v ($v = 1, 2, \dots, n$) Faktoren von b , die nicht alle einander gleich sind, während $a_\mu \neq a_v$ ($\mu \neq v$) gilt, so kann $f(x)$ nur Faktoren von Grad $\geq n$ enthalten, wenn es keine solche Folge d_v gibt, für welche $d_\varrho \equiv d_\kappa \pmod{a_\varrho - a_\kappa}$ für alle $\varrho \neq \kappa$ gilt. Ist insbesondere der Grad von $g(x)$ kleiner als n , so ist $f(x)$ irreduzibel.

N. Tschebotaröw (Kasan).

Giambelli, Giovanni: Sistemi sommabili di equazioni algebriche. Atti Accad. Peloritana Messina **37**, 27—34 (1935).

Introdotta le operazioni per i sistemi di equazioni algebriche si definisce il sistema sommabile e se ne fa un'applicazione alla matrice nulla di forme in più serie di variabili.

Autoreferat.

Ore, Oystein: On the foundation of abstract algebra. II. Ann. of Math., II. s. **37**, 265—292 (1936).

Für Begriffe und Bezeichnungen vgl. Teil I, dies. Zbl. **12**, 5. In Teil I war ein Hauptproblem, in Dedekindschen Strukturen Analoga des Jordan-Hölderschen Satzes und seiner Verallgemeinerungen aufzustellen. An Stelle der Isomorphie in der Gruppentheorie trat die Ähnlichkeit von Quotienten, die im wesentlichen auf Transformierbarkeit mittels des Überganges $[A, B]/B \rightarrow A/(A, B)$ hinauslief. Teil II behandelt in ähnlicher Weise allgemeine Zerlegungssätze (durchweg in Dedekindschen Strukturen). Kap. 1. \mathfrak{A} sei ein Kompositum von Quotienten \mathfrak{U}_i des gleichen Nenners: $\mathfrak{A} = [\mathfrak{U}_1, \dots, \mathfrak{U}_r]$; eine solche Zerlegung heißt eigentlich, wenn kein \mathfrak{U}_i in seinem Komplement $\mathfrak{U}_i = [\mathfrak{U}_1, \dots, \mathfrak{U}_{i-1}, \mathfrak{U}_{i+1}, \dots, \mathfrak{U}_r]$ enthalten ist. Für irgendeinen Faktor \mathfrak{B} von \mathfrak{A} heißt $\mathfrak{U}_i^{\mathfrak{B}} = [\mathfrak{U}_i, [\mathfrak{B}, \mathfrak{U}_i]]$ die Komponente von \mathfrak{B} in \mathfrak{U}_i . Es gilt $[\mathfrak{U}_i^{\mathfrak{B}}, \mathfrak{U}_i^{\mathfrak{C}}] = \mathfrak{U}_i^{[\mathfrak{B}, \mathfrak{C}]}$, und hieraus schließt man: Ist $\mathfrak{A} = [\mathfrak{U}_1, \dots, \mathfrak{U}_r] = [\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_s]$, $\mathfrak{U}_{ij} = \mathfrak{U}_i^{\mathfrak{B}_j}$, $\mathfrak{B}_{ij} = \mathfrak{B}_j^{\mathfrak{U}_i}$, so ist $\mathfrak{U}_i = [\mathfrak{U}_{i1}, \dots, \mathfrak{U}_{is}]$, $\mathfrak{B}_j = [\mathfrak{B}_{j1}, \dots, \mathfrak{B}_{jr}]$ und in $\mathfrak{A} = [\mathfrak{U}_{11}, \dots, \mathfrak{U}_{rs}]$ kann jeweils \mathfrak{U}_{ij} durch \mathfrak{B}_{ij} ersetzt werden. Der Quotient \mathfrak{A} heißt irreduzibel, wenn keine Darstellung $\mathfrak{A} = [\mathfrak{B}, \mathfrak{C}]$ mit echten Faktoren $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ möglich ist. Hauptsatz über Zerlegung in irreduzible Faktoren: Sind $\mathfrak{A} = [\mathfrak{U}_1, \dots, \mathfrak{U}_r] = [\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_s]$ zwei eigentliche Zerlegungen von \mathfrak{A} in irreduzible Faktoren, so ist $r = s$, und zu jedem \mathfrak{U}_i gibt es ein \mathfrak{B}_j , das mit ihm einen eigentlichen Linksfaktor gemein hat und \mathfrak{U}_i in der eigentlichen Zerlegung $\mathfrak{A} = [\mathfrak{U}_1, \dots, \mathfrak{U}_r]$ ersetzen kann (vgl. auch A. Kurosch, dies. Zbl. **13**, 195). — Kap. 2. Direkte Zerlegungen. Der Quotient \mathfrak{M} heißt direkt zerlegbar, wenn $\mathfrak{M} = [\mathfrak{U}, \mathfrak{B}]$ mit relativ primen $\mathfrak{U}, \mathfrak{B}$ ist. Der Quotient \mathfrak{M} von endlicher Länge sei auf zwei Weisen direkt in direkt unzerlegbare Quotienten zerlegt: $\mathfrak{M} = [\mathfrak{U}_1, \dots, \mathfrak{U}_r] = [\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_s]$. Dann ist $r = s$, und die \mathfrak{U}_i sind zu den \mathfrak{B}_i paarweise direkt ähnlich, d. h. es gibt ein \mathfrak{C}_i , das zu \mathfrak{U}_i und zu \mathfrak{B}_i relativ prim ist und für das $\mathfrak{C}_i \mathfrak{U}_i \mathfrak{C}_i^{-1} = \mathfrak{C}_i \mathfrak{B}_i \mathfrak{C}_i^{-1}$ gilt. Jedes \mathfrak{U}_i kann in der ersten Zerlegung durch ein \mathfrak{B}_j ersetzt werden und kann andererseits ein \mathfrak{B}_j in der zweiten Zerlegung ersetzen. Für Gruppen gibt dies den Remak-Schmidtschen Zerlegungssatz. Es wird untersucht, wann der Satz für Quotienten nicht endlicher Länge gilt. Es genügt z. B., daß die betr. Struktur die Endlichkeitsbedingung für fallende Ketten erfüllt und daß außerdem aus zwei direkten Zerlegungen $\mathfrak{M} = [\mathfrak{U}, \mathfrak{B}] = [\mathfrak{C}, \mathfrak{D}]$ eines Quotienten der Struktur die beiden anderen $\mathfrak{M} = [\mathfrak{C}, \mathfrak{B}] = [\mathfrak{U}, \mathfrak{D}]$ gefolgert werden können: reguläre Strukturen. — Kap. 3. Vollständig reduzible Strukturen. Die Struktur Σ mit dem Einselement E_0 heißt vollständig reduzibel, wenn die Relation $A > B > E_0$ die Existenz mindestens eines $C \neq A$ mit $A = [B, C]$ nach sich zieht. Wenn Σ auch ein Allelement O_0 hat, so ist das damit gleichbedeutend, daß es zu jedem Element A von Σ ein Komplement \bar{A} mit $[A, \bar{A}] = O_0$, $(A, \bar{A}) = E_0$ gibt; und auch damit, daß jedes A aus Σ Kompositum von Primelementen ist, die noch so gewählt werden können, daß jedes von ihnen zum Kompositum der übrigen relativ prim ist (Basisdarstellung). Es folgt eine Reihe von eingehenderen Sätzen über vollständige reduzible Strukturen, die natürlich denen über vollständig reduzible Gruppen entsprechen. — Kap. 4. \mathfrak{A} sei ein Quotient endlicher Länge in der Dedekindschen Struktur Σ . Das Kompositum aller rechtsseitigen Primfaktoren von \mathfrak{A} ist der maximale vollständig reduzible Rechtsfaktor von \mathfrak{A} . \mathfrak{A} kann in ein Produkt solcher max. voll. red. Rechtsfaktoren aufgelöst werden: $\mathfrak{A} = \mathfrak{M}_1 \times \dots \times \mathfrak{M}_t$. Diese Zerlegungen werden dazu benutzt, um Sätze über Zerlegungen von Quotienten in Produkte von beliebigen (nicht notwendig maximalen) vollst. red. Faktoren aufzustellen, Sätze, die (in Sonderfällen) mit Untersuchungen von Löwy (S.-B. Heidelberg. Akad. Wiss. **1917**), Ore (dies. Zbl. **3**, 201 u. **5**, 396) und Remak [J. reine angew. Math. **162**, 1—16 (1930); **163**, 1—44 (1931); **164**, 197—242 (1931); dies. Zbl. **2**, 114] zusammenhängen. Diese Sätze bleiben bestehen, wenn an Stelle der als Faktoren verwendeten vollständig reduziblen Quotienten solche von einem allgemeineren, einem sogenannten Normaltypus verwendet werden. Eine Gesamtheit von Quotienten $\mathfrak{S}^{(n)}$ bildet einen Normal-

typus, wenn 1. jeder Primquotient ein $\mathfrak{S}^{(T)}$ ist, 2. das Kompositum zweier $\mathfrak{S}_1^{(T)}, \mathfrak{S}_2^{(T)}$ mit gleichen Nennern wieder ein $\mathfrak{S}^{(T)}$ ist, 3. jede Rechts- oder Linkstransformierte eines $\mathfrak{S}^{(T)}$ wieder ein $\mathfrak{S}^{(T)}$ ist. — Kap. 5. Die Zerlegungen in irreduzible Komponenten (Kap. 1) werden mit den max. voll. red. Faktoren in Zusammenhang gebracht: Eine eigentliche Zerlegung $\mathfrak{M} = [\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_r]$ eines Quotienten \mathfrak{M} endlicher Länge hat ebenso viele Glieder wie eine Linksbasisdarstellung $\mathfrak{N} = [\mathfrak{N}_1, \dots, \mathfrak{N}_r]$, des linksseitigen max. voll. red. Faktors \mathfrak{N} von \mathfrak{M} , und jedes \mathfrak{M}_i gehört zu einem Primquotienten \mathfrak{P}_i , der zu \mathfrak{N}_i ähnlich ist. Deuring (Leipzig).

Stauffer, Ruth: The construction of a normal basis in a separable normal extension field. Amer. J. Math. 58, 585—597 (1936).

1. Zwei Basen a_i, \bar{a}_i der halbeinfachen Algebra \mathfrak{o} über dem Körper P heißen komplementär, wenn die Spurenmatrix $(S(a_i \bar{a}_k))$ die Einsmatrix ist (Spuren aus der regulären Darstellung). Sind auch b_i und \bar{b}_i komplementär, so gilt für die mit irgend zwei Darstellungen Γ, A gebildeten Spuren

$$\sum_i S_{\Gamma}(a_i) S_A(\bar{a}_i) = \sum_i S_{\Gamma}(b_i) S_A(\bar{b}_i). \quad (1)$$

Setzt man, falls die einfachen Bestandteile von \mathfrak{o} schon volle Matrixringe über P sind (absolut irreduzibler Fall), rechts eine Basis aus Matrixeinheiten $c_{ik}^{(i)}$ und deren komplementäre $c_{ki}^{(i)}/f_i$ ein (f_i = Grad des i -ten einfachen Bestandteils), so folgt für zwei irreduzible Charaktere χ_ν, χ_μ von \mathfrak{o}

$$\sum_i \chi_\nu(a_i) \chi_\mu(\bar{a}_i) = \delta_{\nu\mu} = \begin{cases} 1, & \nu = \mu \\ 0, & \nu \neq \mu \end{cases}. \quad (2)$$

Entsprechend erhält man für die Matrixelemente zweier irreduzibler Darstellungen Γ, A ,

$$\begin{aligned} \Gamma(a_i) &= (\alpha_{lm, \gamma}^{(i)}), & A(a_i) &= (\alpha_{lm, \lambda}^{(i)}), \\ \Gamma(b_i) &= (\beta_{lm, \gamma}^{(i)}), & A(b_i) &= (\beta_{lm, \lambda}^{(i)}), \\ \sum_i \alpha_{lm, \gamma}^{(i)} \alpha_{sr, \lambda}^{(i)} &= \sum_i \beta_{lm, \gamma}^{(i)} \beta_{sr, \lambda}^{(i)} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \sum_i \alpha_{lm, \gamma}^{(i)} \alpha_{sr, \lambda}^{(i)} &= 0, & \gamma &\neq \lambda, \\ \sum_i \alpha_{lm, \gamma}^{(i)} \alpha_{sr, \gamma}^{(i)} &= \begin{cases} 0 & (l, m) \neq (r, s) \\ 1/f & (l, m) = (r, s), \end{cases} \end{aligned}$$

für Gruppenringe wohlbekannt. Die komplementären Basen können auch zur expliziten Berechnung der Matrixeinheiten verwendet werden. — 2. Im Gruppenring \mathfrak{o}/P der Gruppe $g = \{S, T, \dots\}$ ergibt (2)

$$\sum_S \chi_\mu(S) \chi_\nu(S^{-1}) = g \delta_{\nu\mu},$$

eine der Orthogonalitätsrelationen für Gruppencharaktere, aus der die andere,

$$\sum_\mu \chi_\mu(S^{-1}) \chi_\mu(T) = h_S g \delta_{ST}$$

in üblicher Weise hergeleitet wird. (g = Ordnung von g , h_S = Anzahl der zu S konjugierten Elemente von g). — Die Klassensummen K_S von g bilden eine Basis des Zentrums \mathfrak{z} von \mathfrak{o} . Aus der zweiten Orthogonalitätsrelation wird leicht geschlossen, daß zu dieser Basis die Basis der $K_{S^{-1}}/h_S g$ komplementär ist. Dies wird zur Berechnung der Diskriminante $d = |S_{\mathfrak{z}/P}(K_S K_{T^{-1}})|$ von \mathfrak{z} benutzt; durch Übergang zu $|S_{\mathfrak{o}/P}(K_S K_{T^{-1}})|$ findet man $d = g^r \prod_S h_S \prod_{i=1}^r f_i^2$. Dabei ist r der Rang des Zentrums = Zahl der irreduziblen

Darstellungen, S durchläuft ein Vertretersystem aller Klassen von g und die f_i sind die Grade der irreduziblen Darstellungen von g . Da d ganz ist, so ist $g^r \prod_S h_S$ durch $\prod_{i=1}^r f_i^2$ teil-

bar. — 3. Sind K und K isomorphe separable galoissche Erweiterungen von k , so ist das direkte Produkt $K \times K$ über K mit dem Gruppenring $\mathfrak{G}(K)$ der galoisschen Gruppe \mathfrak{G} von K/k in K operatorisomorph (vgl. Deuring, dies. Zbl. 5, 6). Es wird bemerkt, daß beim Beweis dieses Satzes die komplementären Basen eine Rolle spielen (vgl. E. Noether, dies. Zbl. 7, 197). — 4. Unter der Annahme, daß $\mathfrak{G}(k)$ absolut halbeinfach, also die Ordnung $n = (K:k)$ von \mathfrak{G} nicht durch die Charakteristik von k teilbar ist, werden die Normalbasen von K/k , d. h. die Basen, die aus den Konjugierten eines Elementes w bestehen, aufgestellt. k wird algebraisch abgeschlossen zu Ω , dementsprechend wird k_Ω gebildet. Ist $\Gamma_i(S) = (\sigma_{ik}^{(i)})$ eine absolut irreduzible Darstellung von \mathfrak{G} , so wird gezeigt, daß für passendes z aus K die Matrix $M_i(z) = \left(\sum_S \sigma_{ik}^{(i)} z^{S^{-1}} \right) = (\xi_{ik}^{(i)}(z))$ über Ω linear unabhängige Elemente $\xi_{ik}^{(i)}(z)$ hat; für passendes w werden sogar alle $\xi_{ik}^{(i)}(w)$ für alle i linear unabhängig,

und da die $\xi_{ik}^{(0)}(w)$ Linearkombinationen der w^s sind, so erzeugt w eine Normalbasis von K/k . Aus diesem Beweis für die Existenz einer Normalbasis schließt man dann genauer: Sind $e^{(i)}$ die unzerlegbaren Idempotenten des Zentrums von $\mathfrak{G}(k)$, und ist z_i ein Element von K mit $z_i^{e^{(i)}} \neq 0$, so erzeugt $w = \sum z_i$ eine Normalbasis von K/k . Aus einer Normalbasis w^{s_1}, \dots, w^{s_n} von K/k ergeben sich alle in der Gestalt $w^{v s_1}, \dots, w^{v s_n}$, wo v ein Nichtnullteiler von $\mathfrak{G}(k)$ ist. Deuring (Leipzig).

Teichmüller, Oswald: p -Algebren. Deutsche Math. 1, 362—388 (1936).

1. Eine p -Algebra ist eine normale einfache Algebra vom Rang p^{2^n} über einem Körper P der Charakteristik $p \neq 0$. Verf. beweist zunächst den von Albert (dies. Zbl. 13, 102) aufgestellten Satz, daß eine p -Divisionsalgebra A vom Range p^2 , die ein $u \nsubseteq P$ mit $u^p = \alpha \in P$ enthält, stets einen zyklischen Zerfällungskörper $P(v)$, $\wp v = v^p - v = \beta \in P$ hat, für den $v \rightarrow u^{-1} v u = v + 1$ ein erzeugender Automorphismus ist. Nach Albert (dies. Zbl. 9, 195) hat jede p -Algebra rein inseparable Zerfällungskörper. Verf. stellt sich die Aufgabe, die Struktur der allgemeinsten von einem gegebenen rein inseparablen Körper zerfallten p -Algebren zu bestimmen. 2. Er entwickelt zuerst eine Theorie der rein inseparablen Körper, die sich auf die Begriffe p -Abhängigkeit, p -Basis und Unvollkommenheitsgrad aufbaut. α heißt von

der Teilmenge \mathfrak{M} von P p -abhängig, wenn $\sqrt[p]{\alpha} \in P(\sqrt[p]{\mathfrak{M}})$. Eine Menge $\mathfrak{M} \subset P$ mit $P^p(\mathfrak{M}) = P$ heißt p -Basis von P , wenn jede endliche Teilmenge von \mathfrak{M} p -unabhängig ist; die gemeinsame Mächtigkeit aller p -Basen von P heißt der Unvollkommenheitsgrad von P . Das Verhalten des Unvollkommenheitsgrades bei algebraischen und transzendenten Erweiterungen wird untersucht. 3. In dem unter 1. genannten Satz ist $A = \sum v^k u^i$ mit den Rechenregeln $u^p = \alpha$, $\wp v = \beta$, $uv = (v+1)u$. Bei beliebigen $\alpha \neq 0$, β aus P wird umgekehrt hierdurch eine p -Algebra $(\alpha, \beta]$ über P definiert. Es ist (Schmid, dies. Zbl. 11, 146) $(\alpha, \beta] \times (\alpha', \beta] \cong (\alpha \alpha', \beta]$; $(\alpha, \beta] \times (\alpha, \beta'] \cong (\alpha, \beta + \beta']$; $(\alpha, \alpha] \cong 1$. — Für einen Körper $P(u)$, $u^p = \alpha \in P$ ist $f'(u) = \frac{d}{dz} f(u) \Big|_{z=u}$

für irgendein Element $w = f(u)$ von $P(u)$ nur von w und u , nicht von der besonderen Darstellung $w = f(u)$ von w durch u abhängig (vgl. Teichmüller, dies. Zbl. 14, 4),

$\frac{dw}{du}$ ist also eine sinnvolle Bildung. Führt man die Bezeichnung $\wp_u y = y^p - c_0$ für Elemente $y = \sum_{i=0}^{p-1} c_i u^i$ aus $P(u)$ ein, so gilt, in Analogie zu Sätzen über verschränkte

Produkte: $(\alpha, \beta] \cong (\alpha, \beta']$ ist mit $\beta' = \beta + \wp_u y$ mit passendem y aus $P(u)$ gleichbedeutend; ferner: $\wp_u y = 0$ ist mit $y = \frac{u}{z} \frac{dz}{du}$ für passendes z gleichbedeutend.

4. Wählt man in $P(u)$ ein anderes erzeugendes Element \bar{u} , $\bar{u}^p = \bar{\alpha} \in P$, so entsteht die Frage, wie $\bar{\beta}$ zu wählen ist, damit $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}] \cong (\alpha, \beta]$ wird. Darüber gibt der folgende Satz Auskunft: $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ seien in P p -unabhängig, es sei $P^p(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = P^p(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_r)$,

und für $\beta_i, \bar{\beta}_i$ aus P gelte $\bar{\beta}_k = \sum_{i=1}^r \beta_i \frac{\bar{\alpha}_i}{\alpha_i} \frac{\partial \bar{\alpha}_k}{\partial \alpha_i}$, also $\beta_i = \sum_{k=1}^r \bar{\beta}_k \frac{\alpha_i}{\bar{\alpha}_i} \frac{\partial \alpha_i}{\partial \bar{\alpha}_k}$. Dann gilt

$\prod(\alpha_i, \beta_i] \cong \prod(\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i]$; speziell also $(f(\alpha), \beta] \cong \left(\alpha, \frac{\alpha}{f(\alpha)} \frac{df(\alpha)}{d\alpha} \right]$. Die Frage nach allen

Relationen zwischen Algebren $(\alpha, \beta]$ wird beantwortet durch: Sind $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ p -unabhängig in P , und ist $\prod(\alpha_i, \beta_i] \cong \prod(\alpha_i, \beta_i]$, so gibt es γ_i in P und Φ in $P^p(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$,

mit $\beta'_i = \beta_i + \wp \gamma_i + \alpha_i \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_i}$. 5. Beliebige p -Algebren. Jede p -Algebra ist einem

direkten Produkt von zyklischen p -Algebren ähnlich. Genauere Aussagen: Hat die p -Algebra A den Zerfällungskörper $I = P(\sqrt[p^{n_1}]{\alpha_1}, \dots, \sqrt[p^{n_r}]{\alpha_r})$, so ist $A \cong \prod(\alpha_i, Z_i, \sigma_i)$, wo Z_i zyklisch vom Grade $p^{m_i} \leq p^{n_i}$ ist. Hat P den Unvollkommenheitsgrad 1, etwa $P = P^p(\alpha)$, so ist jede p -Algebra über P zyklisch und der Exponent stimmt stets mit dem Index überein (vgl. Nakayama, dies. Zbl. 12, 391). Deuring (Leipzig).

Deuring, Max: Einbettung von Algebren in Algebren mit kleinerem Zentrum. *J. reine angew. Math.* **175**, 124—128 (1936).

Es seien k_0 , k_1 und k_2 endliche algebraische Zahlkörper, $k_0 < k_1 < k_2$. Es sei B eine einfache normale Algebra über k_1 mit k_2 als maximalem Teilkörper. Dann wird die Frage behandelt, ob sich B in eine einfache normale Algebra A über k_0 mit k_2 als maximalem Teilkörper einbetten läßt. Wenn dies möglich ist, muß B isomorph dem Teilsystem \bar{A} von A sein, das aus den mit $k_1 < A$ elementweise vertauschbaren Größen von A besteht. Es werden die Bedingungen für die Invarianten der Algebrenklasse von B diskutiert, die im Falle der Einbettbarkeit bestehen müssen. — Nach einem vom Ref. bewiesenen Satz (dies. Zbl. **4**, 100) gehört übrigens das oben erwähnte \bar{A} zu derselben Algebrenklasse wie die Algebra $(A)_{k_1}$. Daraus folgt der Satz 1 der Deuring'schen Arbeit unmittelbar und bei Heranziehung eines Satzes von Köthe (dies. Zbl. **6**, 153) auch der Satz 2.

R. Brauer (Toronto).

Schmidt, Friedrich Karl: Über die Erhaltung der Kettsätze der Idealtheorie bei beliebigen endlichen Körpererweiterungen. *Math. Z.* **41**, 443—450 (1936).

In einem Integritätsbereich \mathfrak{o} ist dann und nur dann jedes Ideal ein Potenzprodukt von endlichvielen Primidealen, wenn: 1. jede echte Teilerkette von \mathfrak{o} -Idealen im Endlichen abbricht, 2. jede echte Vielfachenkette von \mathfrak{o} -Idealen, die alle ein festes Ideal teilen, im Endlichen abbricht, 3. \mathfrak{o} in seinem Quotientenkörper k ganz abgeschlossen ist (E. Noether). Überträgt sich die Gültigkeit der gewöhnlichen Idealtheorie auf die \mathfrak{o} -Hauptordnung \mathfrak{D} einer endlichen algebraischen Erweiterung K von k ? 3. bleibt ohne weiteres erhalten. Nach E. Noether übertragen sich 1. und 2. sicher dann, wenn K/k separabel ist; 1. und 2. gelten dann sogar für \mathfrak{o} -Moduln aus \mathfrak{D} , und dies ist mit der Existenz einer endlichen Modulbasis von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ gleichbedeutend. Aus der Existenz einer endlichen Modulbasis von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ folgt (1) $\sum e_i f_i = (K:k)$ für die \mathfrak{D} -Zerlegung $\mathfrak{D}\mathfrak{p} = \prod \mathfrak{P}_i^{e_i}$ eines \mathfrak{o} -Primideals \mathfrak{p} ($\mathfrak{P}_i = \mathfrak{D}$ -Primideal vom k -Grad f_i). H. G. Grell (dies. Zbl. **12**, 245) und Verf. (unpubliziert) haben gezeigt, daß auch bei inseparablem K/k 1. und 2. ganz allgemein auf Ideale von \mathfrak{D} übertragen werden, die Idealtheorie also bei beliebiger endlicher algebraischer Erweiterung erhalten bleibt. Artin und van der Waerden (Nachr. Ges. Wiss. Göttingen **1926**, 23—27) zeigten, daß \mathfrak{D} eine endliche \mathfrak{o} -Modulbasis hat, wenn $\mathfrak{o}^{1/p}$ ($p = \text{Charakteristik von } k$) eine endliche \mathfrak{o} -Modulbasis hat. Verf. zeigt, daß \mathfrak{D} nicht stets eine endliche \mathfrak{o} -Modulbasis hat. Man kann ein \mathfrak{o} und ein \mathfrak{D} so wählen, daß \mathfrak{D} keine endliche \mathfrak{o} -Modulbasis hat und daß entweder für alle \mathfrak{p} von \mathfrak{o} (1) gilt, oder so, daß für mindestens ein \mathfrak{p} (1) nicht gilt. — Mit Hilfe des aus dem Beweis des Riemann-Roch'schen Satzes bekannten Begriffes der Normalbasis wird bewiesen: Die Hauptordnung \mathfrak{D} einer beliebigen endlichen algebraischen Erweiterung des Körpers $C(x_1, \dots, x_m)$ hat stets eine endliche Modulbasis über $\mathfrak{o} = C[x_1, \dots, x_m]$.

Deuring (Leipzig).

Davenport, H.: The meromorphisms of an elliptic function-field. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **32**, 212—215 (1936).

In der Arbeit von Hasse über Meromorphismen elliptischer Funktionenkörper (dies. Zbl. **11**, 197) war offen geblieben, ob die Meromorphismen absolut algebraisch und wann sie vertauschbar sind. Verf. beweist den algebraischen Charakter und die paarweise Vertauschbarkeit aller Meromorphismen für den Fall $\pi \neq \bar{\pi}$ und $q = p^f = p$ (die Bedeutung von $\pi, \bar{\pi}, q$ s. dies. Zbl. I. c.). Gilt für einen Meromorphismus μ $d x_\mu / y_\mu = c_\mu d x / y$, so folgt unter der angenommenen Voraussetzung $q = p$ ($f = 1$) aus $c_\mu = 0$ die Existenz von ν mit $\mu = \pi \nu$. Dies und die Ungleichung $N(\mu + \nu) \leq 2(N\mu + N\nu)$ (vgl. dies. Zbl. **13**, 197—198, insbesondere die „Normidentität“, wo auch die beiden neueren Beweise von Hasse und Behrbohm für die in Rede stehenden Sätze referiert sind) werden benutzt, um mit Hilfe einer Art von Euklidischem Algorithmus einen Meromorphismus μ in die Form $\mu = n_0 + n_1 \pi + \dots + n_{r-1} \pi^{r-1} + \pi^r \mu_r$, n_i ganz rational, und $N\mu_r < p^r$ für hinreichend großes r , zu bringen. Daraus folgt leicht eine Identität $(\pi^s - 1) \mu = a_0 + \dots + a_t \pi^t$, daraus die Vertauschbarkeit der Mero-

morphismen; für $\mu = \pi$ eine absolut algebraische Gleichung für π und schließlich in $\text{Norm}_{\Gamma(\pi)/\Gamma}((\pi^s - 1)\mu - a_0 - \dots - a_1\pi^l) = 0$ eine absolut algebraische Gleichung für μ . Es wird noch angedeutet, wie sich dieser Beweis auf $q = p^f > p$ ausdehnen läßt.

Deuring (Leipzig).

Grell, Heinrich: Verzweigungstheorie in allgemeinen Ordnungen algebraischer Zahlkörper. *Math. Z.* **40**, 629—657 (1936).

Nachdem E. Noether [*J. reine angew. Math.* **157**, 82—104 (1927)] den Dedekindschen Differenzensatz auf allgemeinere Ordnungen erweitert hatte, entstand als eine nächste Aufgabe, den quantitativen Zusammenhang zwischen den Potenzen (bzw. den Längen der zugehörigen Primärideale) zu erkennen, in welchen ein Primideal \mathfrak{P} einerseits in der entsprechenden Primzahl \mathfrak{op} und andererseits in der Differenten \mathfrak{d} der Ordnung \mathfrak{o} aufgeht. Ohne diese Aufgabe unmittelbar zu lösen, führt der Verf. wesentlich neue Begriffe ein, um die zwischen ihnen bestehenden Relationen aufzustellen. — Ist \mathfrak{m} ein Modul, so wird sein Komplementärmodul \mathfrak{m}' als die Gesamtheit von Zahlen μ' erklärt, so daß die Spuren $s(\mu\mu')$ ganze Zahlen sind, sobald μ den Modul \mathfrak{m} durchläuft. — Unter dem Grad $g_t(\mathfrak{a})$ eines Ideals \mathfrak{a} bzw. einer Ordnung t versteht der Verf. die Länge $\lambda(\mathfrak{a})$ einer aus t -Moduln bestehenden Kompositionsreihe des Restklassenrings von \mathfrak{o} nach \mathfrak{a} . — Als Verzweigungsmodul \mathfrak{v} einer Ordnung \mathfrak{o} definiert er den Restklassenmodul von \mathfrak{o} nach seinem Komplementärmodul \mathfrak{o}' ($\mathfrak{o} < \mathfrak{o}'$) mit \mathfrak{o} als Operatorenbereich. Dann fällt die Differenten $\mathfrak{d} = \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{o}'}$ mit dem Annulator von \mathfrak{v} zusammen. — Gilt die Zerlegung $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}(\mathfrak{P}_1) \dots \mathfrak{d}(\mathfrak{P}_r)$, so entspricht ihr die Zerlegung $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}(\mathfrak{P}_1) + \dots + \mathfrak{v}(\mathfrak{P}_r)$ in eine direkte Summe der Primärmoduln $\mathfrak{v}(\mathfrak{P}_i)$; dann wird die Verzweigungszahl $\mathfrak{v}(\mathfrak{P}_i)$ des Primideals \mathfrak{P}_i als Länge des Primärmoduls $\mathfrak{v}(\mathfrak{P}_i)$ erklärt. — Weiter wird das Hauptradikal $\mathfrak{B}(\mathfrak{a})$ des Ideals \mathfrak{a} von \mathfrak{o} definiert als das Produkt von Primidealen, die in seinem Erweiterungsideal $\mathfrak{D}\mathfrak{a}$ in der Hauptordnung \mathfrak{D} aufgehen. — Ist $\mathfrak{D} = \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{D}'}$ die Körperdifferenten, und geht ihr Primidealfaktor \mathfrak{P} in p in der e -ten Potenz auf, so bezeichne man mit \mathfrak{S} den Supplementfaktor $\mathfrak{D} : \prod_{\mathfrak{P}} \mathfrak{P}^{e-1}$ von \mathfrak{D} . Den zu $\mathfrak{B}(\mathfrak{P})$ gehörigen Bestandteil von \mathfrak{S} bezeichne man mit $\mathfrak{S}_{\mathfrak{B}(\mathfrak{P})}$. — Der Führer \mathfrak{F} von \mathfrak{o} nach \mathfrak{D} ist erklärt als Annulator der Restklassengruppe $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$. Es gilt $\mathfrak{d} \leq \mathfrak{F}\mathfrak{D}$, $\mathfrak{F}^2\mathfrak{D} \leq \mathfrak{d}$. — Gilt in \mathfrak{o} die Primäridealzerlegung $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\mathfrak{P}_1) \dots \mathfrak{F}(\mathfrak{P}_r)$, ist also \mathfrak{D} direkte Summe von $t_i = (\mathfrak{o}, \mathfrak{D}\mathfrak{F}_i^*)$ ($i = 1, 2, \dots, r$), so ist der Index $k(\mathfrak{o}, \mathfrak{P})$ eines Primidealfaktors \mathfrak{P}_i von \mathfrak{F} als Länge einer Kompositionsreihe von \mathfrak{o} -Moduln erklärt, die von \mathfrak{o} zu t_i gezogen ist. — Der Verzweigungssatz von Verf. lautet: Ist $\mathfrak{op} = q \cdot \mathfrak{a}$, wobei q zu \mathfrak{a} teilfremdes Primärideal der Länge $\lambda(q)$ mit \mathfrak{P} als zugehörigem Primideal ist, so gilt:

$$v(\mathfrak{P}) = \{\lambda(q) - g_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{B}(\mathfrak{P}))\} + g_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{S}_{\mathfrak{B}(\mathfrak{P})}) + 2 \cdot k(\mathfrak{o}, \mathfrak{P}).$$

Alle drei Summanden sind ganz und nichtnegativ. — Daraus folgt unmittelbar der E. Noethersche Diskriminantensatz. — Der letzte Teil der Arbeit ist der Verzweigungstheorie der Ordnungen mit umkehrbarem Komplementärmodul gewidmet.

N. Tschebotarow (Kasan).

Lutz, Elisabeth: Les solutions de l'équation $y^2 = x^3 - Ax - B$ dans les corps p -adiques. *C. R. Acad. Sci., Paris* **203**, 20—22 (1936).

Sei k ein endlicher algebraischer Zahlkörper, $\mathfrak{p} = (\pi)$ ein Primideal desselben mit der zugehörigen Primzahl $p \neq 2$, e die Ordnung von \mathfrak{p} und $k_{\mathfrak{p}}$ die p -adische Erweiterung von k . — Die Gleichung $C: y^2 = x^3 - Ax - B$ definiert in $k_{\mathfrak{p}}$ eine Kurve vom Geschlecht 1, wenn wir voraussetzen, daß $x^3 - Ax - B$ nichtverschwindende Diskriminante hat. Die Punkte P auf C mit Koordinaten aus $k_{\mathfrak{p}}$ bilden bei der Addition auf bekannte Weise eine Abelsche Gruppe; jedem solchen Punkt lassen sich Koordinaten $(\xi\pi^{-2n}, \eta\pi^{-3n})$ zuordnen, wo $n \geq 0$ ganz rational ist und ξ, η für $n \neq 0$ p -adische Einheiten bedeuten. Jedem Punkt P auf C entspricht eindeutig eine ganze

rationale Zahl $n \geq 0$, die mit $n(P)$ bezeichnet werde, und die allein im unendlich fernen Punkt den Wert $n = \infty$ hat. Aus den Additionsformeln ergibt sich, daß die Punkte P auf C mit $n(P) \geq m$ für $m > 0$ eine Untergruppe G_m von G bilden und daß die Quotientengruppe G/G_m für jedes solche m endlich ist. — Die Elemente P von G_1 haben eine Parameterdarstellung $P = (x, y) = (\xi \pi^{-2n}, \eta \pi^{-3n})$, und es gibt zu ihnen eine eindeutig bestimmte ganze p -adische Zahl τ , so daß $\tau^2 \equiv \xi (p^{4n})$, $\tau^3 \equiv \eta (p^{4n})$ ist. Setzt man dann $t = \pi^n / \tau$, so hat man $x \equiv t^{-2}$, $y \equiv t^{-3} (p^{4n})$, und jedem P aus G_1 entspricht dann genau eine ganze p -adische Zahl $t(P)$ und umgekehrt jedem $t \equiv 0 (p)$ genau ein Punkt von G_1 . Abschätzungen vermöge der Additionstheoreme erlauben zu zeigen, daß man für $4n(P) > e$ und zu p teilerfremdes k eine Gleichung $n(kP) = n(P)$, ferner $n(p^v P) = n(P) + ve$ hat und daß also, wenn die k_i p -adisch gegen eine ganze p -adische Zahl K konvergieren, die $t(k_i P)$ gleichzeitig gegen ganze p -adische Zahlen T streben. Der zu T gehörige Punkt heiße KP . Ist a die kleinste natürliche Zahl mit $4a > e$, so schließt man ohne Mühe, daß G_a als Modul in bezug auf die Gruppe der ganzen p -adischen Zahlen betrachtet werden kann und eine Basis von etwa d Elementen besitzt, wo d den Grad von k_p über dem p -adischen Körper k_p bezeichnet; G_a ist demnach direktes Produkt von d Gruppen, die isomorph zur additiven Gruppe der ganzen p -adischen Zahlen sind. — Demnach hat insbesondere ein Punkt P mit $4n(P) > e$ gewiß keine endliche Ordnung, und wenn sich k_p auf k_p reduziert, so daß $d = e = 1$ ist, so muß jeder Punkt endlicher Ordnung ganze Koordinaten haben. Dies ist um so bemerkenswerter, als ein analoges Ergebnis auch im Gebiet der rationalen (statt der p -adischen) Zahlen gilt. — Vgl. auch das folgende Referat. *Mahler* (Krefeld).

Weil, André: Sur les fonctions elliptiques p -adiques. C. R. Acad. Sci., Paris **203**, 22–24 (1936).

Die Resultate der obigen Arbeit von Frl. Lutz lassen sich nach A. Weil leicht durch Uniformisierung der Kurven vom Geschlecht 1 im p -adischen erhalten; dies ist darum von Interesse, da eine Untersuchung elliptischer Funktionen p -adischer Veränderlichen noch aussteht. — Die Bezeichnungen seien die gleichen wie in der Note von E. Lutz. Wir uniformisieren C durch die p -adischen elliptischen Funktionen $x = \wp(u)$, $y = \frac{1}{2} \wp'(u)$ und setzen $t = x^{-1/2}$, $\varphi(u) = (\wp(u))^{-1/2}$, so daß

$$\varphi'(u) = \frac{d\varphi}{du} = \sqrt{1 - A\varphi^4 - B\varphi^6} \quad (1), \quad du = d\varphi / \sqrt{1 - A\varphi^4 - B\varphi^6} \quad (2)$$

wird. Durch φ drücken sich die Kurvenkoordinaten in der Form

$$x = \varphi^{-2}, \quad y = \varphi' / \varphi^3 \quad (3)$$

aus. Setzt man $t = \varphi(u)$, $t' = \varphi(v)$, so besteht ein algebraisches Additionstheorem

$$\varphi(u+v) = \frac{t+t'}{\sqrt{1+\Delta(u,v)}}, \quad \Delta(u,v) = \frac{2tt'\{(A+B)(t^2+t't'+t'^2) + \frac{1}{4}At^2t'^2(t+t')^2\}}{\varphi'(u)\varphi'(v)+1 - \frac{A}{2}t't'(t^2+t'^2) - Bt^3t'^3}. \quad (4)$$

Sei nun wieder $p \neq 2$ und seien A und B ganz in k_p . Dann konvergieren die Potenzreihen für $(1+z)^{1/2}$ und $(1+z)^{-1/2}$ nach Potenzen von z im p -adischen bekanntlich, wenn z durch p teilbar ist; die rechte Seite von (2) konvergiert also auch für durch p teilbares φ ; man verifiziert sogar, daß u ganz ist, falls p^2 in φ aufgeht, wo $\varrho > 1/p - 1$, und alsdann hat man $u/\varphi \equiv 1 (p^\alpha)$ ($\alpha = (p-1)\varphi - 1$). Sucht man umgekehrt $\varphi(u)$ durch (1) zu definieren, so genügt es, hierfür Majorantenreihen aufzustellen, die im p -adischen konvergieren. Dazu entwickeln wir die rechte Seite von (1) nach Potenzen von φ und differenzieren $(n-1)$ -mal; dann zeigt man rekurrent, daß $d^n \varphi / d u^n$ vermöge φ eine Reihe von Potenzen wird, deren sämtliche Koeffizienten Polynome in A, B sind, und daß die Zahlkoeffizienten dieser Polynome rationale Zahlen werden, deren Nenner Potenzen von 2 werden. Wählt man insbesondere $u = 0$ und damit $\varphi = 0$, so wird $\varphi^{(n)}(0)$ ein Ausdruck $P_n(A, B)$, der ganz p -adisch ist. Folglich hat die Reihe

$$\varphi(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n(A, B)}{n!} u^n$$

den gleichen Konvergenzradius wie die p -adische Exponentialfunktion und existiert insbesondere für $u \equiv 0(p^e)$ mit $\varrho > 1/p - 1$. Sind ferner A und B willkürliche komplexe Zahlen mit $4A^3 - 27B^2 \neq 0$, so definiert diese Reihe in der Umgebung von $u = 0$ eine Lösung von (4): diese rein algebraische Eigenschaft muß offenbar im p -adischen bestehen bleiben. — Man schließt auf diese Weise speziell, daß für ganzes m mit $m > e/p - 1$ eine eindeutige Beziehung zwischen den Elementen von G_m und den Multipla u von p^m besteht; d. h. für $m > e/p - 1$ ist G_m isomorph einer additiven Gruppe von Zahlen aus k_p ; für $p > 5$ geben demnach die p -adischen elliptischen Funktionen ein Ergebnis analog dem von Frl. Lutz, nur etwas unschärfer. Man könnte versuchen, auch den Fall $p = 2$ zu behandeln, kommt dann aber auf Konvergenzschwierigkeiten.

Mahler (Krefeld).

Mordell, L. J.: On the representation of a binary cubic form as a sum of cubes. J. London Math. Soc. **11**, 204—208 (1936).

Let N be the least number such that any binary cubic form $ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$ can be represented by

$$\sum_{n=1}^N (a_n x + b_n y)^3,$$

where a_n, b_n are integers. The condition $b \equiv c \pmod{2}$ is necessary, since

$$b = \sum_1^N a_n^2 b_n \equiv \sum_1^N a_n b_n^2 \equiv c \pmod{2}.$$

The author proves that $6 \leq N \leq 8$ and then, by a proof due to Erdős, that $N > 6$; hence $N = 7$ or 8 .

Wright (Aberdeen).

Mordell, L. J.: On the four integer cubes problem. J. London Math. Soc. **11**, 208—218 (1936).

Let $v(k)$ denote the least number of numbers of the set

$$0, \pm 1, \pm 2^k, \pm 3^k, \dots$$

needed to represent all integers. Oltramare has proved that $v(3) \leq 5$ and, if we consider the numbers $\equiv \pm 4 \pmod{9}$, it is clear that $v(3) \geq 4$. Whether $v(3) = 4$ or 5 is not known. The author shows that 4 cubes suffice for more than $\frac{3}{4}$ of all integers; for example, identities of the type

$$(ak + \xi)^3 + (bk + \eta)^3 + (ck + \zeta)^3 + (dk + \tau)^3 = 18k + r$$

with $a, b, c, d, \xi, \eta, \zeta, \tau$ integers independent of k , exist for $r = 0, \pm 1, \pm 3, \pm 6, \pm 7, \pm 8, 9$ and do not exist when $r = \pm 4, \pm 5$. Whether such identities exist for $r = \pm 2$ is not known, but similar identities hold for $108k + 2, 216k + 92, 432k + 52$, for example. The author also considers the question of representing n as a sum of four cubes in an infinity of ways. If, in

$$n = x^3 + y^3 + z^3 + t^3 \tag{1}$$

we put $2x = a + b, 2y = a - b, 2z = c + d, 2t = c - d$,

we have $3(ab^2 + cd^2) = 4n - a^3 - b^3$.

The author shows that (1) has an infinity of solutions if one set a, b, c, d exist such that $-(a + b)(c + d)$ is positive and not a perfect square.

Wright (Aberdeen).

Ko, Chao: Decompositions into four cubes. J. London Math. Soc. **11**, 218—219 (1936).

The author gives a table of decompositions of all integers ≤ 100 into four positive or negative cubes; apart from the numbers 76 and 99, decompositions of the form $x^3 + y^3 + 2z^3$ are given, while for these $76 = 10^3 + 7^3 + 4^3 - 11^3$ and $99 = 5^3 - 3^3 + 1^3$.

Wright (Aberdeen).

Vinogradov, I. M.: On the number of fractional parts of a polynomial lying in a given interval. Rec. math. Moscou, N. s. **1**, 3—7 (1936).

Vinogradov, I. M.: A new method of resolving of certain general questions of the theory of numbers. Rec. math. Moscou, N. s. **1**, 9—19 (1936).

In der zweiten Arbeit verschärft Verf. die schon früher mit seiner neuen Methode

von ihm erhaltene Abschätzung Weylscher Summen, und in der ersten Arbeit wendet er das Ergebnis auf die Gleichverteilung (mod. 1) von Polynomen und verwandten Funktionen an (vgl. dies. Zbl. **12**, 247 u. **13**, 53, 200). Ist n ganz ≥ 20 , A, A_0, \dots, A_n reell,

$$A = \frac{a}{q} + \lambda q^{-2 + \frac{1}{n^2}}, \quad (a, q) = 1, \quad \lambda \ll 1, \quad P > 0 \text{ ganz},$$

$$P^{1/2} \ll q \ll P^{n - \frac{1}{n^2}}, \quad f(x) = Ax^{n+1} + A_0x^n + \dots + A_n,$$

so ist

$$\sum_{x=1}^P e^{2\pi i f(x)} \ll P^{1-\varrho}, \quad \text{wo} \quad \varrho = \frac{1}{Dn^4(\log n)^2}$$

mit $D = 73$ für $q > P$, $D = 54$ für $q < P$, $D = 27$ für $P \ll q \ll P$.

($A \ll B$ heißt für $B > 0$, daß $|A| \leq cB$ mit nur von n abhängigem $c > 0$). Vgl. die neueren van der Corputschen Untersuchungen, Proc. Amsterdam **39**, dies. Zbl. **13**, 295, 393 sowie die Vinogradowsche Arbeit dies. Zbl. **14**, 11. *J. F. Koksma*.

Vinogradow, I.: A new method of estimation of trigonometrical sums. Rec. math. Moscou, N. s. **1**, 175—188 (1936).

By means of a method invented by himself the author obtains an upper bound for the absolute value of the sums

$$\sum_{x=R+1}^{R+P} e^{2\pi i f(x)} \quad \text{and} \quad \sum_{x=R+1}^{R+P} e^{2\pi i F(x)},$$

where $f(x)$ is a polynomial and the n^{th} derivate of $F(x)$ lies between two given numbers. He proves that the Hardy-Littlewood's asymptotic formula for the number of representations of an integer N in the form $N = x_1^n + \dots + x_r^n$ holds for every $r > 10n^3 \log n$, if $n > 20$. Finally he gives an approximation for the number of integers x ($R < x \leq R + P$), which satisfy the inequality $0 \leq f(x) - y \leq \sigma$ [or $0 \leq F(x) - y \leq \sigma$], y being a convenient integer. His results are much better than the corresponding till now known inequalities. *van der Corput* (Groningen).

Schneider, Theodor: Arithmetische Untersuchungen elliptischer Integrale. Math. Ann. **113**, 1—13 (1936).

Nachdem in den letzten Jahren schon Siegel (dies. Zbl. **3**, 265), Schneider (unpubliziert), Schneider (dies. Zbl. **10**, 105), Pólya (dies. Zbl. **12**, 76) und Popken-Mahler (dies. Zbl. **12**, 341) einige Teilresultate über Transzendenz von elliptischen Integralen und Modulfunktionen hergeleitet hatten, bringt die vorliegende Arbeit grundlegende und abschließende Ergebnisse über solche Fragen, die um so bemerkenswerter sind, als sie anscheinend nach einer Bemerkung des Verf. auch noch auf Funktionen höheren Geschlechts übertragen werden können. Der Kürze halber beschränke ich mich auf die überraschendsten und wichtigsten so erhaltenen Sätze: Satz 1: Gehören die Weierstrassschen Funktionen $\wp(x)$ und $\zeta(x)$ zu den Invarianten g_2 und g_3 und hat $\wp(x)$ bei $x = \beta$ keinen Pol, ist ferner $|a| + |b| \neq 0$, so ist mindestens eine der sechs Größen $g_2, g_3, a, b, \wp(\beta), a\beta + b\zeta(\beta)$ transzendent. — Hierin ist neben anderen schönen Spezialfällen folgender wichtige Satz enthalten: „Der Umfang einer Ellipse mit algebraischen Achsen ist transzendent (Verallgemeinerung der Transzendenz von π).“ — Satz 2: Die Weierstrassschen Funktionen \wp und \wp^* zu den Invarianten g_2, g_3, g_2^*, g_3^* mögen die Eigenschaft haben, daß $\wp(x)$ und $\wp^*(q\beta)$ algebraisch unabhängig sind und bei $x = \beta$ keinen Pol besitzen. Dann ist mindestens eine der Zahlen $g_2, g_3, g_2^*, g_3^*, \wp(\beta), \wp^*(q\beta), q$ transzendent. — Hierin liegt das interessante Teilergebnis: „Die absolute Invariante $J(\tau)$ ist für algebraisches τ allein dann algebraisch, wenn τ imaginärquadratisch ist.“ — Satz 3: g_2 und g_3 seien algebraisch, und es sei $\wp(\beta)$ endlich. Dann ist eine der drei Zahlen $\wp(\beta), q \neq 0$ und $e^{q\beta}$ transzendent, also speziell, wenn ω eine eigentliche Periode von $\wp(x)$ bezeichnet, der Quotient π/ω nicht algebraisch. — Die Beweise aller drei Sätze sind einander sehr ähnlich; wie der Verf. begnügen wir uns daher damit, eine Skizze des Beweises nur von Satz 1 zu geben. — Mittels der Differentialgleichung zeigt man zunächst: Hilfssatz: Es ist $\frac{d^r \wp(x)}{dx^r} = \wp^{(r)}(x)$ ein Polynom in $\wp(x), \wp'(x), g_2/2$ und g_3 mit ganzen rationalen Koeffizienten höchstens vom Gesamtgrad $[\frac{1}{2}(r+2)]$, und dabei $|\wp^{(r)}(x)| \leq \gamma_1^r r^r, |\wp(r)| < \gamma_2$, wo die natürlichen Zahlen $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ nicht von r abhängen. — Seien nun gegen die Behauptung alle Zahlen $g_2, g_3, a, b, \wp(\beta)$ und $a\beta + b\zeta(\beta)$ und also auch $\wp'(\beta)$ algebraisch; sie erzeugen dann etwa einen Körper \mathbb{K} vom Grad s , und wir

setzen $k = 24s + 1$. Man kann ganze Zahlen $C_{\lambda, \mu}$ aus \mathbb{R} finden, die nicht alle verschwinden, samt allen Konjugierten absolut höchstens gleich $\gamma_{31}^r r^{2r}$ sind und für die der Ausdruck

$$L(x) = \sum_{\lambda=0}^{n-1} \sum_{\mu=0}^{n-1} C_{\lambda, \mu} \varphi(x)^\lambda (ax + b\zeta(x))^\mu$$

an allen Stellen $\xi_\alpha = \alpha\beta$ ($\alpha = 1, 2, \dots, k$) von der Ordnung $r = [n^2/2k]$ verschwindet; dabei ist noch ohne wesentliche Einschränkung die Annahme zulässig, daß β kein rationaler Teil einer Periode ist. — Durch wiederholte Anwendung einer funktionentheoretisch-arithmetischen Schlußweise des Verf. (dies. Zbl. **10**, 106), die vorher auch schon von Gelfond benutzt wurde (dies. Zbl. **9**, 53), kann von hier aus sukzessive hergeleitet werden, daß $L(x)$ in einer überall dicht liegenden Punktmenge und also identisch verschwindet; das führt dann aber zu dem gesuchten Widerspruch. Mahler (Krefeld).

Schneider, Theodor: Über die Approximation algebraischer Zahlen. J. reine angew. Math. **175**, 182—192 (1936).

Satz I. Ist ξ reell algebraisch, $\mu > 2$ und hat die Ungleichung

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^\mu} \quad (1)$$

unendlich viele verschiedene rationale Lösungen $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots (2 \leq q_1 \leq q_2 \leq \dots)$ in gekürzten $\frac{p_v}{q_v}$, so gilt $\limsup_{v \rightarrow \infty} \frac{\log q_{v+1}}{\log q_v} = \infty$. (2)

Durch diesen Satz wird ein älterer Siegelscher Satz überholt [Math. Ann. **84**, 80—99 (1921)]. — Zusatz: Ist $\mu > 1$ und sind die q_v Potenzen eines festen q_0 mit natürlichen Exponenten, so gilt ebenfalls (2) (vgl. nachstehendes Referat). —

Anwendung: Für rationales $\frac{p}{q}$ mit $0 < \left| \frac{p}{q} \right| < 1$ und $\varepsilon > 0$ ist

$$\Theta = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{p}{q} \right)^{[(1+\varepsilon)n]}$$

transzendent. — Beim Beweis von Satz 1 wird ein auch an sich interessanter Hilfssatz über die Gitterpunktsanzahl in einem Würfelabschnitt im R_k benutzt. Koksma.

Mahler, Kurt: Ein Analogon zu einem Schneiderschen Satz. I. Mitt. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **39**, 633—640 (1936).

Mahler, Kurt: Ein Analogon zu einem Schneiderschen Satz. II. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **39**, 729—737 (1936).

Im Anschluß an die vorangehende Schneidersche Arbeit zeigt Verf. folgendes Analogon zum dort genannten Zusatz des Satzes 1: **Satz 2:** Ist ξ algebraisch $\mu > 1$ und hat (1) unendlich viele rationale Lösungen $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots (2 \leq q_1 \leq q_2 \leq \dots)$ in gekürzten $\frac{p_v}{q_v}$ mit Nennern q_v , die allein durch endlich viele gegebene Primzahlen teilbar sind, so gilt (2). Beim Beweis wird im wesentlichen die Schneidersche Methode benutzt, jedoch mit Vereinfachungen. Mit Hilfe des Thue-Siegelschen Satzes zeigt dann Verf. noch: **Satz 3.** Ist $\xi \neq 0$ algebraisch, $\mu > 0$, so gibt es höchstens endlich viele gekürzte $\frac{p}{q}$ mit (1), für die pq allein durch endlich viele gegebene Primzahlen teilbar ist. J. F. Koksma.

Mengenlehre und reelle Funktionen.

Misra, Rama Dhar: On Hilbert's curve. Proc. Benares Math. Soc. **16**, 13—34 (1934).

Lösung der Aufgabe, die von Hilbert 1891 geometrisch (als Limes einer Folge von immer dichter im Quadrat verlaufenden polygonalen Streckenzügen) konstruierten „Kurve“, die das ganze Quadrat bedeckt, in eine parametrische Darstellung mittels zweier numerisch zu definierenden Funktionen zu bringen. Verf. ordnet jedem dyadisch

dargestellten Parameterwerte zwei andere dyadische Brüche als Funktionenwerte durch spezielle Hilfsoperationen zu. U. a. beweist Verf. auch die Nichtdifferenzierbarkeit beider Funktionen.

B. Knaster (Warszawa).

Steinhaus, Hugo: La courbe de Peano et les fonctions indépendantes. C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 1961—1963 (1936).

Die Koordinaten $x(t)$, $y(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) der Peanoschen Kurve sind gegenseitig unabhängige Funktionen in folgendem Sinne: Ist E_1 eine meßbare Menge von x -Werten, E_2 eine solche von y -Werten, M_1 bzw. M_2 bzw. M_{12} die Menge der t -Werte, für welche $x \in E_1$ bzw. $y \in E_2$ bzw. $x \in E_1$, $y \in E_2$ gilt, und bedeutet $|E|$ allgemein das Maß der Menge E , so ist stets $|M_{12}| = |M_1| \cdot |M_2|$. Diese Bemerkung benutzt Verf. zu einer einfachen Konstruktion von Peanoschen Kurven in mehrdimensionalen und abzählbar dimensional Räumen.

A. Khintchine (Moskau).

Sierpiński, Wacław: La base de M. Hamel et la propriété de Baire. Publ. Math. Univ. Belgrade **4**, 221—225 (1935).

Unter einer Hamelschen Basis versteht man eine (stets nichtabzählbare) Menge \mathfrak{B} reeller Zahlen $a, b, c, \dots \neq 0$ mit der Eigenschaft, daß jede reelle Zahl x auf eine und nur eine Art darstellbar ist in der Form $x = \alpha a + \beta b + \gamma c + \dots$, wo $\alpha, \beta, \gamma \dots$ rational und bis auf höchstens endlich viele Ausnahmen $= 0$ sind. Hamel hat die Existenz solcher Basen \mathfrak{B} nachgewiesen (Math. Ann. **40**). Verf. hat früher (Fundam. Math. **1**, 109) gezeigt, daß \mathfrak{B} nicht B -meßbar sein kann (jedoch kann \mathfrak{B} sehr wohl L -meßbar sein). Jetzt zeigt er: Ist die Kontinuumshypothese $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ richtig, so existiert eine Hamelbasis, die in jeder perfekten Menge von erster Kategorie ist, und 2. eine Hamelbasis, die eine Lusinsche Menge ist, d. h. eine Menge, die keine nicht-abzählbare, nichtdichte Teilmenge enthält. Ohne Kontinuumshypothese wird die Existenz einer Hamelbasis gezeigt, welche die Bairesche Eigenschaft nicht besitzt, d. h. nicht dargestellt werden kann in der Form $G - P + R$, wo G offen und P und R Mengen erster Kategorie sind.

Nöbeling (Erlangen).

Sierpiński, W.: Une démonstration d'existence des suites transfinies décroissantes d'ensembles F_σ . Mathematica **12**, 116—118 (1936).

La démonstration de l'auteur n'utilise pas la théorie de la mesure, mais est basée sur l'axiome du choix en ce sens que la suite en question dépend du choix. Une construction, n'utilisant pas du choix arbitraire, était récemment donnée par Hausdorff [Fundam. Math. **26**, 247 (1936); ce Zbl. **14**, 54]. Dans la démonstration, l'usage de l'axiome du choix est aussi essentiel chez Hausdorff. *Kolmogoroff.*

Putnam, R. G.: On inner transformations. Fundam. Math. **26**, 192—195 (1936).

The author attempts to prove, without using the hypothesis of separability, the following theorem of Mazurkiewicz: If the transformation $y = \varphi(x)$ is continuous in a complete (separable) space X and is an inner transformation on a set $A \subset X$, then $\varphi(x)$ is also an inner transformation on some G_δ — set in X which contains A . The reasoning is unsound, however, since the statement near the bottom of page 193 that " $y \in \bigcap_p V_{\xi_1, \dots, \xi_p}$ for a suitably chosen sequence $\{\xi_p\}$ " cannot be justified. *Whyburn.*

Izumi, Shin-ichi: On the F. Riesz' lemma. Tôhoku Math. J. **42**, 65—66 (1936).

Following the method of F. Riesz [Acta Litt. Sci. Szeged **5**, 208—221 (1932), this Zbl. **4**, 296; Verh. Intern. Math.-Kongreß Zürich **1932 I**, 258—269, this Zbl. **6**, 341] the author proves the following fundamental theorem of the theory of the Lebesgue integral: If the derivative of an absolutely continuous function $F(x)$ is zero almost everywhere, $F(x)$ is a constant.

Saks (Warszawa).

Riesz, Frédéric: Sur l'intégrale de Lebesgue comme l'opération inverse de la dérivation. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. **5**, 191—212 (1936).

The paper contains a very elegant account of the Lebesgue theory of integration. The characteristic feature of this account is that the theory of integration is based on that of derivation and that, as concerns the theory of measure, the author uses

only the simplest and actually obvious properties of sets of measure zero. The definition of the Lebesgue integral is as follows: A non-negative function $f(x)$ is integrable in (a, b) if there exists an increasing function $F(x)$ such that (*) $F'(x) = f(x)$ almost everywhere in (a, b) . Then the lower limit of the differences $F(b) - F(a)$ where $F(x)$ is an arbitrary increasing function subject to the condition (*) is the definite integral of $f(x)$ over (a, b) . The paper contains the theorems: on term by term integration of sequences of functions, on integration by parts and on integration by substitution. Incidentally there is given also a simple proof of the well-known inequality $\int_a^b f^\alpha g^\beta dx \leq \left(\int_a^b f dx \right)^\alpha \left(\int_a^b g dx \right)^\beta$ ($\alpha + \beta = 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$).
Saks (Warszawa).

Fréchet, Maurice: Sur quelques définitions possibles de l'intégrale de Stieltjes. *Duke math. J.* **2**, 383—395 (1936).

In the first part of the paper the author discusses various definitions of the Stieltjes-Riemann integral (*) $\int_a^b F(x) dC(x)$ where $F(x)$ and $C(x)$ are both monotonic functions in a finite interval (a, b) . Thus: (I) $F(x)$ is said to be integrable with respect to $C(x)$ over (a, b) if the sums $\sum_{i=0}^{n-1} F(\xi_i) \cdot [C(x_{i+1}) - C(x_i)]$, where $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ and $x_i \leq \xi_i < x_{i+1}$, tend to a definite limit as $\max(x_{i+1} - x_i) \rightarrow 0$; this limit is denoted as the integral (*). (II) The upper bound of the sums $\sum_i f(x_{i-1})[C(x_i) - C(x_{i-1})]$ and the lower bound of the sums $\sum_i f(x_i)[C(x_i) - C(x_{i-1})]$ are respectively termed the upper and the lower integrals of $F(x)$ with respect to $C(x)$ on (a, b) ; the function $F(x)$ is called integrable with respect to $C(x)$ on (a, b) if these two integrals are equal, their common value being then denoted by (*) (definition of Glivenko). — The author proves: In order that the integral (*) exist in the sense (I) it is necessary and sufficient that the functions $F(x)$ and $C(x)$ have no point of discontinuity in common. In order that the integral (*) exist in the sense (II) it is necessary and sufficient that on each side of every point x in (a, b) one at least of the functions $F(x)$ and $C(x)$ be continuous. There is discussed the formula on integration by parts corresponding to both definitions. — The second part of the paper is devoted to the integration over the infinite interval $(-\infty, +\infty)$.
Saks (Warszawa).

Analysis.

Schenker, Otto: Geometrische Betrachtungen zum arithmetischen und geometrischen Mittel. *Tôhoku Math. J.* **42**, 185—189 (1936).

Ausführliche Auseinandersetzung eines Induktionsbeweises für die Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel. *W. Fenchel* (Kopenhagen).

Pfeiffer, G.: Du domaine de la théorie des déterminants de Jacobi. *Bull. Sci. Univ. Kiev, Rec. math.* **1**, 7—15 u. franz. Zusammenfassung 15 (1935) [Ukrainisch].

Consider the following system of q functions y_i depending on q independent variables ξ_j :

$$y_i = \frac{A_i/\xi_1 + \dots + A_{i,q-1}\xi_{q-1} + A_{i,0}\xi_0}{A_0/\xi_1 + \dots + A_{0,q-1}\xi_{q-1} + A_0\xi_0} \equiv \frac{\theta_i}{\theta_0} \equiv \frac{\theta_i/\xi_0}{\theta_0/\xi_0} \equiv \frac{u_i}{u_0}. \quad (i = 1, 2, \dots, q)$$

Assume that the A 's depend on a parameter ε , but not on the ξ 's. Let

$$\eta_i = \frac{\xi_i}{\xi_0} \quad (i = 1, 2, \dots, q-1), \quad Y_1 = \frac{D(y_1, \dots, y_q)}{D(\eta_1, \dots, \eta_{q-1}, \varepsilon)}, \quad G_1 = \frac{D(\theta_1, \dots, \theta_q, \theta_0)}{D(\xi_1, \dots, \xi_q, \xi_0)}.$$

The author shows that $G_1 = (-1) u_0^{q+1} \xi_0 Y_1$, so that the relations $Y_1 \neq 0$, $G_1 \neq 0$

are equivalent, if $u_0 \neq 0$. We obtain similar results, if we introduce into the A 's several parameters $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$. J. Shohat (Philadelphia).

Pfeiffer, G.: Sur un changement des variables. Bull. Sci. Univ. Kiev, Rec. math. 1, 16—25 u. franz. Zusammenfassung 25 (1935) [Ukrainisch].

Consider the arbitrary function Φ of its arguments

$$\Phi \left(z_\lambda, x_\mu, p_{\sigma\tau}, \frac{D(z_{p_1}, \dots, z_{p_s})}{D(x_{j_1}, \dots, x_{j_s})} \right) \left(\sigma, \lambda = 1, 2, \dots, \kappa; \tau, \mu = 1, 2, \dots, n; p_{\sigma\tau} = \frac{\partial z_\sigma}{\partial x_\tau} \right),$$

where the z 's are functions of the x 's. Take $z_{\sigma_1}, \dots, z_{\sigma_\pi}$ for new independent variables and $x_{\tau_1}, \dots, x_{\tau_\pi}$ for new functions ($\pi \leq \kappa, \pi \leq n$). By introducing arbitrary functions, the author derives relations involving the new and old first derivatives and Jacobians, so that the new ones can be found. J. Shohat (Philadelphia).

● **Murri, Carlo Alfredo:** Sull'integral seno. Loano: Tipogr. Loanese 1935. 19 pag.

The author gives an elementary presentation of various methods for evaluating the definite integral

$$S(a) = \int_0^a \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} - \int_a^\infty \frac{\sin x}{x} dx$$

(use of asymptotic expansions, of the Fourier expansion for $\frac{\sin x}{x}$, etc.), also elementary relations involving $S(a), S(2a), \dots$. He closes with the interpolation formula

$$y(x) \sim \sum_{r=0}^n \frac{h}{\pi} \frac{\sin \frac{\pi}{h} (x - rh)}{x - rh} y_r. \quad (y_r \equiv y(rh))$$

(Numerous misprints. In places lack of rigor and preciseness; thus, practically no discussion of the degree of convergence of the approximate formulae employed. Ref.)

J. Shohat (Philadelphia).

Corput, J. G. van der: Verteilungsfunktionen. VIII. Mitt. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 39, 579—590 (1936).

In dieser letzten Mitteilung wird ein in IV. vorkommender Satz benutzt, um Satz 13 aus der Einleitung zu beweisen. Für I.—VII. s. dieselben Proc. 38 (1935); 39 (1936) und dies. Zbl. 12, 347; 13, 57, 160, 203; 14, 11. J. F. Koksma (Amsterdam).

Leighton, Walter, and H. S. Wall: On the transformation and convergence of continued fractions. Amer. J. Math. 58, 267—281 (1936).

In order to investigate the convergence of an infinite continued fraction $\xi \equiv y_0 + \frac{x_1}{|y_1|} + \frac{x_2}{|y_2|} + \dots$ ($x_n \neq 0$), the authors consider the "transformed" continued

fraction $\eta \equiv b_0 + \frac{a_1}{|b_1|} + \frac{a_2}{|b_2|} + \dots \equiv T_\xi$ ($a_n \neq 0$) i. e., A_n/B_n and X_n/Y_n denoting the n -th convergents for η and ξ resp., then, with properly chosen α_n, β_n ,

$$D_0 A_n = \alpha_n X_n + \beta_n X_{n+1}, \quad D_0 B_n = \alpha_n Y_n + \beta_n Y_{n+1} \quad (D_0 \neq 0, n = 0, 1, 2, \dots)$$

(special case: "equivalent" transformation). They first establish conditions under which the convergence of η implies that of ξ (also, when $\lim \xi = \lim \eta$). Then, applying to various η known criteria of convergence, the authors obtain new such criteria for ξ , also properties of the sum-function for continued fractions

with variable elements. Illustrations. 1°. $y_0 + \frac{1}{|y_1|} + \frac{1}{|y_2|} + \dots$ converges, if $0 < \left| \frac{1}{y_2 n y_{2n+1}} \right| \leq \frac{1}{4}$, $\left| \frac{1}{y_{2n-1} y_{2n}} \right| \geq \frac{25}{4}$ ($n = 1, 2, \dots$). 2°. If $h_1, h_2, \dots \neq 0$ and

$\lim_{n \rightarrow \infty} h_{2n} h_{2n+2\kappa-1} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} h_{2n} h_{2n+2\kappa+1} = \infty$ for some integer $k \geq 0$, then, given in the complex z -plane any finite region R at a minimum positive distance from O ,

there exists a positive integer $N = N(R)$ such that $h_{2n} + \frac{z}{|h_{2n+1}|} + \frac{z}{|h_{2n+1}|} + \dots$ ($n \geq N$) converges uniformly in R .

J. Shohat (Philadelphia).

Achyeser, N. A., et M. Krein: Sur deux questions de minima qui se rattachent au problème des moments. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **1**, 343—346 (1936).

The authors establish necessary and sufficient conditions for the existence of a function $f(x)$, with a finite number of discontinuities of the first kind in $(-1, 1)$,

having preassigned $n + 1$ first moments $s_\kappa = \int_{-1}^1 f(x) x^\kappa dx$ ($\kappa = 0, 1, \dots, n$), and such

that $-(1 - \theta)L \leq f(x) \leq (1 + \theta)L$, with given $L(>0)$ and θ . The method is similar to that previously employed for the case $\theta = 0$ (this Zbl. **10**, 351; **13**, 109). They further discuss the range of possible values of L for a given θ (with $|\theta| < 1$); they also give the solution of the following minimum-problem: find

$\min. \left\{ \int_{-1}^1 |p_n(x)| dx + \theta \int_{-1}^1 p_n(x) dx \right\}$ for all polynomials $p_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ with $\sum_{i=0}^n a_i s_i = 1$.

Similar results are given for the corresponding trigonometric moments-problem:

$\int_0^{2\pi} f(\varphi) e^{-i\kappa\varphi} d\varphi = \text{given } c_\kappa = a_\kappa - i b_\kappa$ ($\kappa = 0, 1, \dots, n$), $f(\varphi)$ as described above.

J. Shohat (Philadelphia).

Popoviciu, Tibère: Sur un problème de maximum de Stieltjes. C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 1645—1647 (1936).

The author considers the expression

$$D \equiv D(x_1, \dots, x_n; f) = f(x_1)f(x_2) \dots f(x_n) \cdot \prod_{i,j=1; i>j}^n (x_i - x_j)^2.$$

Here the points x_i are distributed on a set E formed by m closed intervals (a_i, b_i) ($i = 1, 2, \dots, m$; $a_i < b_i \leq a_{i+1}$), the distribution being arbitrary in the sense that in (a_i, b_i) lies a certain number k_i ($0 \leq k_i \leq n$) of points. The real function $f(x)$, defined on E , is subject therein to certain conditions [continuity at a_i, b_i , non-negativeness inside (a_i, b_i) , $f(a_i) = f(b_i) = 0, \dots$]. The main result of this Note can be stated as follows: D attains its maximum for a unique distribution $x_i = \xi_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) (distinct, none coinciding with a_i, b_i), and the correspondence between $f(x)$ and the maximal distribution $\{\xi_i\}$ is continuous. — Some special $f(x)$ ($= 1, e^{-x^2}, 1 - x^2, \dots$), considered by Stieltjes, yield extremal properties of the zeros of the classical orthogonal polynomials.

J. Shohat (Philadelphia).

Geronimus, J.: On a supposition of Stieltjes. Commun. Inst. Sci. Math. et Méc., Univ. Kharkoff et Soc. Math. Kharkoff, IV. s. **13**, 55—61 (1936).

Let $\{P_n(x)\}$ ($n = 0, 1, \dots$) be an orthonormal system of Tchebycheff polynomials in $(-1, 1)$, with the weight-function

$$p(x) \geq 0 \quad \left(\int_{-1}^1 p(x) P_n(x) P_m(x) dx = \delta_{mn}; m, n = 0, 1, \dots \right).$$

What can be said of the polynomial $E_{n+1}(x)$, of degree $n + 1$, obtained from the Tchebycheff function $Q_n(x)$ of the second kind by means of the relation

$$\frac{1}{Q_n(y)} = E_{n+1}(y) + \frac{\alpha}{y} + \dots \equiv E_{n+1}(y) + \left(\frac{1}{y} \right) \left(\alpha, \dots - \text{const}; Q_n(y) = \int_{-1}^1 \frac{P_n(x)}{y - x} p(x) dx \right)?$$

For $p(x) \equiv 1$ Stieltjes stated and Szegő recently proved [this Zbl. **10**, 202 (1935)] that the zeros of $E_{n+1}(x)$ all lie inside $(-1, 1)$ and are separated by those of the Legendre polynomial $X_n(x)$. The present paper shows this result to hold, for

$n \geq 2\nu - 1$, if $p(x)$ is of the type $\frac{\sqrt{1-x^2}}{|q(z)|^2}$ ($z = x + \sqrt{x^2 - 1}$), where $q(z)$ is a polynomial of degree 2ν , with real coefficients, which does not vanish for $|z| = 1$. The proof follows directly from the following interesting fact. The sequence $\{E_{n+1}(x)\}$ forms an orthogonal system (with $p_1(x) = \frac{p(x)}{1-x^2}$), if and only if $p(x)$ is of the type

indicated $\left(\text{we assume here the existence of } L - \int_{-1}^1 \frac{\log p(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} \right)$. The latter conclusion is based upon the properties (Bernstein, Geronimus) of the polynomial $S_n(y) = \frac{1}{Q_n(y)\sqrt{y^2-1}} + \left(\frac{1}{y}\right)$, which is related to $E_{n+1}(y)$ as follows:

$$E_{n+1}(y) - \sqrt{y^2-1} S_n(y) = \text{const} + \left(\frac{1}{y}\right). \quad J. Shohat.$$

Geronimus, J.: On some quadrature formulas and on allied theorems on trigonometric polynomials. Bull. Amer. Math. Soc. 42, 129—135 (1936).

The author makes use of Achyesser-Krein theorem concerning the existence of functions deviating the least from zero and having a preassigned "Abschnitt" of their Fourier expansion. The following result is established. Given the function $F(\theta) = \sum_{\kappa=n-\varrho}^{\infty} (A_{\kappa} \cos \kappa \theta + B_{\kappa} \sin \kappa \theta)$. We can find numbers $(0 \leq) \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_{2m} (< 2\pi)$ ($m \leq n$) and a constant $L (> 0)$ such that for any trigonometric polynomial $G(\theta)$, of order $\leq n$,

$$\int_0^{2\pi} F(\theta) G(\theta) d\theta = L \left\{ \sum_{i=1}^m G(\theta_{2i-1}) - G(\theta_{2i}) \right\}. \quad \left(\varrho \leq \frac{n-1}{2} \right) \quad (1)$$

The θ_i are the zeros of a certain trigonometric polynomial, and L must satisfy a certain stated inequality. The author further applies (1) in order to obtain the minimum, actually attained, of $\int_0^{2\pi} |G(\theta)| d\theta$ for any

$$G(\theta) = \alpha_n + \sum_{\kappa=0}^{n-1} \{ \alpha_{\kappa} \cos(n-\kappa)\theta + \beta_{\kappa} \sin(n-\kappa)\theta \},$$

such that

$$\omega(G) \equiv \sum_{\kappa=0}^{\varrho} (\alpha_{\kappa} a_{n-\kappa} + \beta_{\kappa} b_{n-\kappa}) = 1 \quad \left(\varrho \leq \frac{n-1}{2} \right).$$

J. Shohat (Philadelphia).

Gontcharoff, W.: Sur les formules d'interpolation de Lagrange et de Newton. Commun. Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff et Soc. Math. Kharkoff, IV. s. 13, 41—52 (1936).

The chief results are as follows. Let the points of interpolation a_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) be positive and increase monotonically to ∞ , subject naturally to the condition $\sum_1^{\infty} 1/a_n < \infty$; then, if the method of Lagrange converges, that of Newton does also and to the same limit. Let the a_n be arbitrary (real or complex) save for the restriction $\sum_1^{\infty} 1/|a_n| < \infty$; in order that convergence of the Lagrange method shall imply convergence of the Newton method it is n. and s. that sequence $\{S_n\}$ be bounded, where

$$S_n = \sum_{m=1}^{n-1} |\varphi_n(a_m) - \varphi_n(a_{m+1})| + |\varphi_n(a_n)|, \quad \varphi_n(x) = \prod_{m=n+1}^{\infty} (1 - x/a_m).$$

The Newton method may converge, however, when that of Lagrange does not.

C. R. Adams (Providence).

Remes, Eugène: Sur une propriété extrême des polynômes de Tchebycheff. Commun. Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff et Soc. Math. Kharkoff, IV. s. 13, 93—95 (1936).

The paper gives an interesting generalization of a known result of Tchebycheff concerning polynomials deviating the least from zero. — Given a closed interval $S: \langle a, b \rangle$ of length l , and positive numbers $\lambda = \theta l$, κ ($0 < \theta < 1$). Consider all polynomials $P_n(x)$, of degree $\leq n$, such that $\max. |P_n(x)| \leq \kappa$, x belonging to an arbitrary set $E \subset S$,

meas. $E \geq \lambda$. Then $\max_{a \leq x \leq b} |P_n(x)| \leq M \equiv \kappa T_n \left(\frac{2}{\theta} - 1 \right)$ (T_n = trigonometric polynomial of degree n), equality attained if and only if

$$P_{n, \frac{1}{2}}(x) = \begin{cases} \pm \kappa T_n \left(\frac{2x - a - (a + \lambda)}{\lambda} \right), & E \equiv < a, \quad a + \lambda > \\ \pm \kappa T_n \left(\frac{2x - b - (b - \lambda)}{\lambda} \right), & E \equiv < b - \lambda, \quad b >. \end{cases}$$

The proof is based upon the study of the points ξ where $|P_n(\xi)| = \max_{a \leq x \leq b} |P_n(x)|$ and the representation of $P_{n, \frac{1}{2}}(x)$ and $P_n(x)$ by means of Lagrange interpolation formula.

J. Shohat (Philadelphia).

Abramseco, N.: Sur le développement d'une fonction suivant les puissances croissantes d'un polynome et applications à la détermination des courbes de convergence de certaines séries de polynomes. (2. congr. des math. roum., Turnu-Severin, 5.—9. V. 1932.) Mathematica, Cluj 9, 321—327 (1935).

The author gives an elementary discussion of an expansion of the form

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n z + B_n) [(z-a)(z-b)]^n, \quad (A_n, B_n \text{ const}) \quad (1)$$

which is a special case of the more general one:

$$f(z) \sim \sum_{i=0}^{\infty} (U_{i,0} + U_{i,1}z + \dots + U_{i,p-1}z^{p-1}) \frac{P^i(z)}{i!}, \quad (U_{i,j} \text{ const}) \quad (2)$$

where $P(z)$ is a given polynomial of degree p , with zeros a_1, a_2, \dots, a_p . [We have: $f(z) = Q(z) + P(z)f_1(z)$, $f_1(z) = Q_1(z) + P(z)f_2(z) \dots$, where $Q(z), Q_1(z), \dots$ are polynomials of degree $\leq p-1$, coinciding in value with $f(z), f_1(z), \dots$ resp. at $z = a_1, a_2, \dots, a_p$, and (2) follows.] An algorithm is given for determining the $U_{i,j}$ which, applied to (1), yields:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (\alpha_n z + \beta_n) [(z-a)(z-b)]^n, \quad (3)$$

$$\alpha_n = \frac{\partial^n \beta}{\partial t^n}, \quad \alpha = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}, \quad \beta = \frac{af(b) - bf(a)}{a - b}, \quad l = ab.$$

First, investigate the validity of (1) for $f(z) \equiv \frac{1}{u-z}$; then, assuming $f(z)$ holomorphic, use Cauchy integral formula and get contour-integral representations for A_n, B_n . We thus find that if $f(z)$ is holomorphic in a certain domain D , then (1) is valid in the interior of the largest region which is bounded by a curve of the form $|z-a||z-b|=R$, lying inside D . (1) may be considered as a generalization of Taylor series (let $a = -b$, then $b = 0$). The paper closes with a brief discussion of the region of convergence of the series (1), where the A_n, B_n are given, by representing it as the sum

$$z \sum_{n=0}^{\infty} A_n [z-a](z-b)]^n + \sum_{n=0}^{\infty} B_n [(z-a)(z-b)]^n. \quad J. Shohat.$$

Mindlin, J. A.: On the expansion of any function into a series of Schlömilch. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 1, 151—153 (1936).

(Cf. Idem, this Zbl. 10, 15—16.) Let $f(x)$, with a continuous derivative of bounded variation in the closed interval $(0, \pi)$, satisfy the condition $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) x^{-n} = A$ (finite) for an arbitrarily given $n > 0$. The author derives the following expansion in $(0, \pi)$:

$$f(x) = \frac{a_1^{(n+r)}}{(\frac{1}{2}x)^r} J_{n+r}(x) + \frac{a_2^{(n+r)}}{(\frac{1}{2} \cdot 2x)^r} J_{n+r}(2x) + \dots \quad (-\frac{1}{2} < r < \frac{1}{2}) \quad (1)$$

($J_n(x)$ — Bessel functions of order 0), where the a 's are explicitly given (in form of definite integrals involving the hypergeometric functions $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ and the Gegen-

bauer-Jacobi polynomials $C_n^{\alpha, \beta}(x)$). The proof (but briefly sketched) is based upon the use of the following integral equation in $\varphi(x)$:

$$f(x) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(n+r+\frac{1}{2})} \int_0^\pi \varphi(x \cos \xi) \sin^{2r} \xi C_n^{(r-\frac{1}{2}, r-\frac{1}{2})}(\cos \xi) d\xi, \quad (2)$$

among the solutions of which there exists one with the following properties:

$$\Phi(\mu) = \Phi_n(\mu) + \Re(\mu) + Q_{n-1}(\mu), \quad \Phi_n(\mu) \equiv (-1)^n \Phi_n(-\mu),$$

$Q_{n-1}(\mu)$ = arbitrary polynomial of degree $n-1$, $\Re(\mu)$ = arbitrary function with $\Re(-\mu) \equiv (-1)^{n-1} \Re(\mu)$. The expansion (1) is now obtained by combining (2) with the Fourier series for $\Phi_n(\mu)$. Special consideration is given to the case $r = \frac{1}{2}$, where Legendre polynomials enter into play. J. Shohat (Philadelphia).

Danilevskij, A., et M. Krein: Sur les développements bilinéaires des noyaux symétriques, positifs au sens de Mercer. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **1**, 315—318 (1936).

Let $\{\varphi_i(x)\}$ be a complete orthonormal system of characteristic functions of the continuous, symmetric, and positive kernel $k(x, s)$, the corresponding characteristic values being denoted by $\{\lambda_i\}$. The authors prove the elegant theorem that if the kernel admits of a development of the form $k(x, s) = \sum_{i=1}^\infty \varphi_i(x) \varphi_i(s)$, then the functions $\varphi_i(x)$ are continuous and $\varphi_i(x) = \sum_{k=1}^\infty a_{ik} \frac{\varphi_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}}$, where the matrix $\|a_{ik}\|$ is orthogonal by columns. Conversely, any such matrix gives an absolutely and uniformly convergent development of the kernel. Further, if the kernel has continuous partial derivatives $k_{pq}(x, s)$ ($p, q = 1, 2, \dots, n$) then the functions $\varphi_i(x)$ have at least n continuous derivatives, and $k_{pq}(x, s)$ is represented by the series obtained by formal termwise differentiation, the resulting series being absolutely and uniformly convergent in the interior of the fundamental domain. In particular, if $k(x, s)$ is analytic in x and s , the functions $\varphi_i(x)$ must be analytic. E. Hille (New Haven, Conn.).

Morgan, G. W.: On the convergence of transform integrals. Proc. London Math. Soc., II. s. **41**, 199—208 (1936).

Die Arbeit hat den Zweck, die „Fouriersche Darstellungsformel“

$$\int_0^{+\infty} K(xu) \int_0^{+\infty} K(ut) f(t) dt du = f(x), \quad (*)$$

wobei K ein Fourierscher Kern im Sinne von Watson ist (dies. Zbl. **7**, 64), unter geeigneten Voraussetzungen bezüglich K und der darzustellenden Funktion $f(x)$ zu beweisen. Bezüglich K wird vorausgesetzt, daß $K(x)$ und die beiden ersten primitiven Funktionen von $K(x)$ beschränkt in $(0, +\infty)$ sind. Bezüglich f sei angenommen, daß $f(x)$ für alle $x > 0$ der Integralmittelwert für $0 < y < x$ einer Funktion $\varphi(y)$ ist und daß $\varphi(y)$ und $\varphi(y)/\sqrt{y}$ in dem Intervall $0 < y < +\infty$ im Lebesgueschen Sinne integrierbar sind. Dann gilt (*) für alle $x > 0$, vorausgesetzt daß in (*) beide Integrale nicht im Lebesgueschen Sinne sondern sowohl im Nullpunkt als auch im Unendlichen als uneigentliche Integrale verstanden werden. Der Beweis verläuft nach dem Muster der Hardy-Titchmarshschen Methode (dies. Zbl. **7**, 63) und benutzt ein dem Verf. von Hardy mitgeteiltes Lemma. Es wird sodann gezeigt, daß, wenn für K die obigen Annahmen erfüllt sind und $|f|$ integrierbar und f von beschränkter Schwankung und stetig in $(0, +\infty)$ ist, die Darstellungsformel für alle $x > 0$ auch dann gilt, wenn der Teil $\int_0^{+\infty}$ des äußeren Integrals sowie das innere Integral als Lebesguesche

Integrale betrachtet werden. Der Beweis beruht auf von Rademacher und dann von Kaczmarz [Studia Math. **1**, 87—121 (1929)] entwickelten Methoden. Wintner.

Doetsch, Gustav: Zerlegung einer Funktion in Gaussche Fehlerkurven und zeitliche Zurückverfolgung eines Temperaturzustandes. Math. Z. 41, 283—318 (1936).

Es handelt sich im wesentlichen um die Auflösung der Funktionalgleichung

$$F(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4t}(x-\xi)^2} d\Psi(\xi)$$

und die statistische oder wärmetheoretische Deutung der Resultate. — Erstens wird gefragt nach einer totalstetigen Lösung $\Psi(\xi)$ mit $\Psi'(\xi) = \Phi(\xi) \in L_2(-\infty, \infty)$. Es sei $T[f]$ die Fourier-Transformierte der Funktion f . Notwendig und hinreichend mit $\Phi(\xi) \in L_2$ ist, daß $F \in L_2$ und $\varphi(y) = e^{ty^2} T[F] \in L_2$, woraus folgt $\Phi(\xi) = T^{-1}[\varphi]$ nach dem Satz von Plancherel. Die Gauß-Transformation $F = \mathcal{G}_{(t)}[\Phi]$ ist im metrischen Raume L_2 stetig und konvergenzverstärkend, da $\|\mathcal{G}_{(t)}[\Phi]\| \leq \|\Phi\|$; die Umkehrung ist dagegen überall unstetig, was z. B. für die Wärmeleitungstheorie wichtig ist. Verf. zeigt, daß $e^{txy} = e^{ty^2} \mathcal{G}_{(t)}[e^{ixy}]$ und daß x eine absolute Invariante ist, und zwar sind diese Invarianten die einzigen, die $O(|x|^\mu)$ bei $|x| \rightarrow \infty$ sind. Ferner wird die Umkehrformel von Tricomi (dies. Zbl. 13, 258) für die zweiseitige Laplace-Transformation

$g(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sz} G(z) dz$ behandelt und notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz einer Lösung $G(z)$ mit $e^{z^2/2} G(z) \in L_2(-\infty, \infty)$ werden bestimmt. — Es sei jetzt $\Psi(\xi)$ nur von beschränkter Schwankung für $-\infty \leq \xi \leq \infty$

und $g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iyx} dG(x) \equiv \mathfrak{B}[G]$. Damit eine monoton wachsende Lösung existiere

ist notwendig und hinreichend, daß $F(x)$ in $[-\infty, \infty]$ von beschränkter Schwankung ist und $\frac{i}{y} e^{ty^2} \mathfrak{B}[F]$ positiv definit ausfällt. — Schließlich wird nach der Möglichkeit einer Zerlegung einer statistischen Funktion $F(x)$ in endlich viele Fehlerkurven gefragt, d. h. nach der Auflösung von

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\sigma_i} e^{-\frac{(x-x_i)^2}{2\sigma_i^2}}$$

(n, a_i, x_i, σ_i Unbekannte) und einige anscheinend praktisch durchführbare Methoden dazu werden entwickelt. — Die Methode und die Lösbarkeitsbedingungen im Falle $\Phi(\xi) \in L_2$ sind wohl kaum als neu zu bezeichnen, aber die sich daran knüpfenden Bemerkungen bieten vieles von Interesse. Zu dem ausführlichen Literaturverzeichnis wären noch einige Arbeiten des Ref. hinzuzufügen: Ann. of Math., II. s. 27, 427—464 (1926) [s. auch Math. Z. 32, 422—425 (1930)] für Umkehrformeln, und Trans. Amer. Math. Soc. 39, 131—153 (1936) (dies. Zbl. 13, 259) für metrische Eigenschaften und absolute Invarianten der Gauß-Transformation. E. Hille (New Haven, Conn.).

Humbert, P.: Some new operational representations. Proc. Edinburgh Math. Soc., II. s. 4, 232—237 (1936).

When $f(p) = p \int_0^\infty e^{-px} h(x) dx$ $f(p)$ is termed the symbolic or operational image of $h(x)$ and the relationship between $f(p)$ and $h(x)$ is indicated by the symbol $f(p) \doteq h(x)$. The present paper proves, amongst others, the following results:

$$ci(p) \sin p - si(p) \cos p \doteq \tan^{-1} x \quad (1)$$

where

$$\int_p^\infty \frac{\cos t}{t} dt = ci(p); \quad \int_p^\infty \frac{\sin t}{t} dt = si(p),$$

$$2^k p (p^2 + 1)^{(k-1)/2} \{ \sqrt{p^2 + 1} - p \}^n \doteq J_{n,k}(x), \quad (2)$$

where $J_{n,k}(x)$ denotes the generalized Bessel function

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi (2 \cos \theta)^k \cos(n\theta - x \sin \theta) d\theta \quad (\text{so that } J_{n,0}(x) = J_n(x)),$$

$$\frac{\partial J_{n,k}(x)}{\partial k} = J_{n,k}(x) \log 2 - \int_0^x ci(x-y) \frac{\partial J_{n,k}(y)}{\partial y} dy. \quad (3)$$

Murnaghan (Baltimore).

Reihen:

Verblunsky, S.: On the Fourier constants of a bounded function. Proc. Cambridge Philos. Soc. **32**, 201—211 (1936).

The paper is devoted to the solution of the following problem: Given $k+1$ real constants c_0, c_1, \dots, c_k , to find a necessary and sufficient condition that there shall exist a function $f(x)$, such that (*) $|f(x)| < 1$, and that $(\frac{*}{*}) \int_0^\pi f(x) \cos vx dx = c_v$ ($v = 0, 1, \dots, k$). It turns out that there exists a sequence of polynomials $p_n(x_1, x_2, \dots, x_{n+2})$ ($n = 1, 2, \dots$) with integer coefficients and the following property: In order that c_0, c_1, \dots, c_k shall satisfy (*) and $(\frac{*}{*})$, it is necessary and sufficient that $|c_0| < \pi$ and that

$$p_n\left(\cos \frac{c_0}{4}, \sin \frac{c_0}{4}, c_1, \dots, c_n\right) > 0, \quad p_n\left(\cos \frac{c_0}{4}, -\sin \frac{c_0}{4}, -c_1, \dots, -c_n\right) > 0. \quad (n=1, 2, \dots, k)$$

It will be observed that c_0 is the only coefficient which occurs transcendently. The polynomials p_n are given as determinants. The paper is a continuation of another paper (Proc. Cambridge Philos. Soc. **32**, 30—39, this Zbl. **14**, 153), dealing with a similar problem for moments. It may be added that by change of variable the latter problem reduces to a problem analogous to (*) $(\frac{*}{*})$, the cosines being replaced by sines.

A. Zygmund (Wilno).

Hardy, G. H., and J. E. Littlewood: Some more theorems concerning Fourier series and Fourier power series. Duke math. J. **2**, 354—382 (1936).

The following result, which is, in a sense, a theorem on "strong summability", constitutes the principal result of the paper. Let $u(\theta)$ be an L -integrable function of period 2π , and let $s_n(\theta)$ be the partial sums of the Fourier series of $u(\theta)$. If, for a given s , we put $\varphi(x, t) = u(x+t) + u(x-t) - 2s$, and if $k \geq p > 1$, then

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|s_n(x) - s|^k}{n} \right\}^{1/k} \leq K \left(\int_0^\pi \frac{|\varphi(x, \theta)|^p}{\theta} d\theta \right)^{1/p},$$

where K depends on k and p only. The theorem is false for $p = 1$, but it holds if the Fourier series of $u(\theta)$ is a power series in $e^{i\theta}$. Corresponding results are established for Fourier transforms. The proof of the main theorem is based on a series of propositions interesting in themselves. For example: (a) If $p > 1$, $u(\theta)$ is periodic and even, $\theta^{-1}|u(\theta)|^p$ is integrable, and $v(\theta)$ is the function conjugate to $u(\theta)$,

then $\int_0^\pi \frac{|v(\theta)|^p}{\theta} d\theta \leq K \int_0^\pi \frac{|u(\theta)|^p}{\theta} d\theta$, where K depends only on θ . (b) If $1 \leq p \leq k < \infty$,

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ is analytic for $|z| < 1$, and the expression $\int_1^\pi |f(re^{i\theta})|^p |1 - re^{i\theta}|^{p-1} d\theta$

is bounded for $r < 1$, then $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|c_n|^k}{n} \right)^{1/k} \leq K \left(\int_{-\pi}^\pi |F(\theta)|^p |\theta|^{p-1} d\theta \right)^{1/p}$, where

$K = K(k, p)$, and $F(\theta) = \lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta})$ (it is shown that $F(\theta)$ exists for almost all θ).

A. Zygmund (Wilno).

Marcinkiewicz, J.: Sur les séries de Fourier. Fundam. Math. 27, 38—69 (1936).

The paper contains a number of important contributions to the theory of Fourier series. For example: (a) Completing Kolmogoroff's well-known theorem [Fundam. Math. 4, 324—328 (1923)] the author shows that there is an L -integrable function $f(x)$, whose Fourier series $\mathfrak{S}[f]$ oscillates finitely almost everywhere. (b) For every function $\omega(t)$ satisfying the condition $\omega(t) \log \frac{1}{t} \rightarrow \infty$ as $t \rightarrow 0$, there exists a periodic $f \in L$ such that $\mathfrak{S}[f]$ diverges almost everywhere, although $h^{-1} \int_0^h |f(x+t) - f(x)| dx = O(\omega(h))$. (It was previously shown by the author [this Zbl. 12, 401] that, if

$$h^{-1} \int_0^h |f(x+t) - f(x)| dx = O\left(\frac{1}{\log 1/h}\right),$$

then $\mathfrak{S}[f]$ converges almost everywhere.) (c) There exists an f integrable in the general Denjoy sense, such that $\mathfrak{S}[f]$ is not summable by Abel's method in a set of positive measure. (d) If f is integrable in the general Denjoy sense, then, for almost every x , a necessary and sufficient condition for the existence of the integral

$$\int_0^\pi \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^\pi$$

is the differentiability of the integral of $f(x)$. (e) If, for x belonging to a set E of positive measure, the function $f(x)$ has a k -th de la Vallée Poussin derivative, then the Fourier series of f , differentiated term by term k times, is summable (C, k) almost everywhere in E . (In particular, if $f'(x)$ exists for $x \in E$, then $\mathfrak{S}[f]$, differentiated formally, is summable $(C, 1)$ for almost every $x \in E$.) Moreover, the author gives new proofs of a theorem of Plessner [J. f. Math. 158, 219—227 (1927)] concerning the existence of conjugate integrals of higher order, and of the following proposition: If, for $x \in E$, we have an equation

$$f(x+t) = a_0(x) + a_1(x)t + \dots + a_{k-1}(x) \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + \omega(x, t) \frac{t^k}{k!},$$

where $\omega(x, t) = O(1)$ if $x \in E$, $t \rightarrow 0$, then for almost all $x \in E$, the expression $\omega(x, t)$ tends to a finite limit $a_k(x)$ as $t \rightarrow 0$. A. Zygmund (Wilno).

Dirichletsche Reihen, fastperiodische Funktionen:

Petersen, Richard: Über eine Klasse analytischer Funktionen von spezieller fast-periodischer Struktur. Acta math. 67, 81—122 (1936).

In seiner dänisch geschriebenen Habilitationsschrift (dies. Zbl. 6, 199) hat der Verf. die Klasse derjenigen analytischen Funktionen $f(s) = f(\sigma + it)$ untersucht, welche auf jeder vertikalen Geraden eines Streifens $\alpha < \sigma < \beta$ fastperiodisch sind, ohne im Streifen $[\alpha, \beta]$ fastperiodisch zu sein, und in einigen späteren kleineren Mitteilungen (dies. Zbl. 8, 12; 9, 252 und insbesondere 11, 347) analytische Funktionen untersucht, welche auf einer vorgegebenen Menge von vertikalen Geraden fastperiodisch sind. In der vorliegenden Arbeit werden diese Untersuchungen einheitlich dargestellt und dadurch insbesondere der Inhalt der Habilitationsschrift allgemein zugänglich gemacht.

B. Jessen (Kopenhagen).

Ingham, A. E.: Some trigonometrical inequalities with applications to the theory of series. Math. Z. 41, 367—379 (1936).

Das Hauptresultat dieser Arbeit ist: Es sei $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{\lambda_n t}$ gleichmäßig konvergent in $-T \leq t \leq T$, die λ_n seien reell und $\lambda_n - \lambda_{n-1} \geq \gamma > 0$. Dann ist für jedes $T > \pi/\gamma$

$$|a_n| \leq A(T\gamma) \cdot \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)| dt, \quad \sum |a_n|^2 \leq A(T\gamma) \cdot \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt,$$

wobei $A(x) = \frac{\pi x^2}{2(x^2 - \pi^2)}$. Für $T < \pi/\gamma$ gibt es keine analogen Ungleichungen. [Mit einer ungenauen Schranke für T vgl. N. Wiener, A class of gap theorems. Annali di Pisa 3 (1934); dies. Zbl. 10, 28.] Hieraus folgt der Satz: Es sei 1. $\lambda_n - \lambda_{n-1} \geq \gamma > 0$ für $n > n_0$, 2. $\sum_1^\infty a_n e^{-\lambda_n s} = f(s)$ ($s = \sigma + it$) konvergent für $\sigma > 0$, 3. $\frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(\sigma + it)|^2 dt = O(1)$ für ein festes $T > \pi/\gamma$ und $\sigma \rightarrow +0$, 4. die Funktion $\frac{f(s) - f(0)}{s}$, wenn geeignet definiert auf $\sigma = 0$ sei stetig im Bereich $\sigma \geq 0$, $-\delta \leq t \leq \delta$, für ein $\delta > 0$ [z. B. $f(s)$ regulär in $s = 0$]. Dann konvergiert $\sum a_n$ und ist $= f(0)$. Das Wesentliche an diesem Satz ist, daß dank der Schranke für T (die durch keine kleinere ersetzt werden kann), keine explizite Voraussetzung über die a_n nötig ist (analog zu einem Lückensatz von Hardy und Littlewood). Ferner folgt der zuerst von Pólya (1923) bewiesene Satz: Ist $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) \geq \gamma > 0$, so enthält jedes abgeschlossene Intervall von der Länge $2\pi/\gamma$ auf der Konvergenzgeraden der Reihe 2 einen singulären Punkt der Funktion $f(s)$. Der Schlußparagraph enthält Bemerkungen zu dem Grenzfall $T = \pi/\gamma$.

Otto Szász (Cincinnati, Ohio).

Davenport, H., and H. Heilbronn: On the zeros of certain Dirichlet series. J. London Math. Soc. 11, 181—185 (1936).

1. $\zeta(s, a) = \sum_{n=0}^\infty (n+a)^{-s}$, $0 < a \leq 1$ hat für rationales a außer $a = 0$ und $a = \frac{1}{2}$ unendlich viele Nullstellen in $\sigma > 1$, das gleiche gilt für transzendentes a . Für rationales $a = l/k$, $k > 2$, $(l, k) = 1$, $0 < l < k$ wird $\zeta(s, a) = \frac{k^s}{n \equiv l \pmod{k}} \sum_{n=1}^\infty n^{-s}$ mit

$Z(s) = \frac{k^s}{\alpha(l)} \sum_{n \equiv l \pmod{k}}^\infty \alpha(n) n^{-s}$ verglichen, wo $\alpha(n)$ durch $\alpha(p) = \begin{cases} 1, & \chi_1(p) = 0, \\ i, & \chi_1(p) = -1 \end{cases}$, p prim,

$\alpha(\prod p_i^{e_i}) = \prod \alpha(p_i)^{e_i}$ durch einen festen reellen Nichteauptcharakter χ_1 modulo k definiert ist. Für

$$M(s, \chi) = \sum_{n=1}^\infty \alpha(n) n^{-s} = \prod_p (1 - \alpha(p) \chi(p) p^{-s})^{-1} \quad (\chi \text{ Charakter mod } k)$$

findet man:

$$\log M(s, 1) = -\frac{1}{2}(1+i) \log(s-1) + O(1),$$

$$\log M(s, \chi_1) = -\frac{1}{2}(1-i) \log(s-1) + O(1), \quad \log M(s, \chi) = O(1),$$

falls $\chi \neq 1$, $\chi \neq \chi_1$ für $s \rightarrow 1 + 0$. Hieraus folgt leicht

$$Z(s) = \frac{2k^s}{\Phi(k)} R\left(\frac{1}{\alpha(l)} M(s, 1)\right) + O(1),$$

da aber für gegebene $\delta > 0$, $H > 0$ Zahlen s_1, s_2 mit $1 < s_1 < s_2 < 1 + \delta$ so gefunden werden können, so daß $R\left(\frac{1}{\alpha(l)} M(s, 1)\right) > H$, $R\left(\frac{1}{\alpha(l)} M(s, 1)\right) < -H$ gilt, so ist $Z(s_1) > 0 > Z(s_2)$ für hinreichend großes H , also $Z(s) = 0$ in einem Punkt von $s_1 < s < s_2$. Mittels des Kroneckerschen Approximationssatzes kann bei gegebenen $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ ein $\tau > 0$ mit $|\zeta(s + \tau i, l/k) - \alpha(l) Z(s)| < \varepsilon$ in $\sigma > 1 + \delta$ gefunden werden. Wendet man dies auf einen hinreichend kleinen Kreis um eine Nullstelle $s_1 > 1$ von $Z(s)$ an, so ergibt der Satz von Rouché die Existenz einer Nullstelle von $\zeta(s, l/k)$ in der Nähe von $s_1 + \tau i$. — Für transzendentes a sind die Zahlen $\log(a + n)$, $n = 0, 1, \dots$ ersichtlich ganzzahlig linear unabhängig. Ist für ein gegebenes $\delta > 0$ $\sum_0^m (n+a)^{-1-\delta} > \sum_{m+1}^\infty (n+a)^{-1-\delta}$, so wird $\alpha(n)$ durch $\alpha(n) = 1$ für $n \leq m$, $\alpha(n) = -1$ für $n > m$ erklärt, $Z(s) = \sum_0^\infty \alpha(n) (n+a)^{-s}$ hat in $1 < s < 1 + \delta$ eine Nullstelle, und eine Anwendung des Kroneckerschen Satzes er-

gibt wie oben Nullstellen von $\zeta(s, a)$ in $1 < \sigma < 1 + \delta$. — 2. Für die Zetafunktion $\zeta(s, Q)$ einer ganzzahligen positiv definiten quadratischen Form mit Fundamentaldiskriminante, also für die Zetafunktion einer Idealklasse eines imaginären quadratischen Zahlkörpers, ergibt die oben angewendete Methode die Existenz unendlich vieler Nullstellen in $\sigma > 1$, vorausgesetzt, daß die Klassenzahl gerade ist, was die Existenz eines reellen Nichthauptcharakters der Klassengruppe zur Folge hat. Für $Q(x, y) = x^2 + 5y^2$ vgl. Potter-Titchmarsh, dies. Zbl. 11, 391. *Deuring.*

Differentialgleichungen, Potentialtheorie:

Chiellini, Armando: Applicazione della teoria degli invarianti differenziali lineari alla integrazione delle equazioni differenziali lineari del terzo ordine. Boll. Un. Mat. Ital. 15, 113—118 (1936).

Notwendige und hinreichende Bedingung, damit eine lineare Differentialgleichung 3. Ordnung sich in eine Gleichung mit konstanten Koeffizienten transformieren läßt, ist das Verschwinden einer gewissen Differentialinvariante der Gleichung. Die Bestimmung der Transformation erfordert dann die Auflösung einer Riccatischen Gleichung oder einfach Quadraturen. *G. Cimmino (Napoli).*

Greenwood, J. A.: Associated algebraic and partial differential equations. Bull. Amer. Math. Soc. 42, 222—224 (1936).

If to a system of algebraic equations there is associated a system of partial differential equations by replacing x_i^a by $\partial^a u / \partial x_i^a$ [Riquier, Ann. École norm., III. s. 45, 145—188 (1928)] then the algebraic system is inconsistent if and only if the general solution of the differential system is $u = 0$; the general solution of the differential system is a non-zero polynomial if and only if the algebraic system has only the solution $x_i = 0$. *Raudenbush (New Haven).*

Robbins, C. K.: Contact transformations in solved form. Amer. Math. Monthly 43, 288—293 (1936).

If X, Y, P arise from x, y, p by a contact transformation, then $Y_x - PX_x + (Y_y - PX_y)p = 0$, $Y_p - PX_p = 0$. The author determines (without integration) classes of particular solutions of these equations by assuming (I) P does not involve p ; (II) P involves only p . Subsequently he eliminates P and obtains classes of solutions for the resulting partial differential equation, in which X is regarded as the unknown. *J. M. Thomas (Durham).*

Lewy, Hans: Generalized integrals and differential equations. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 22, 377—381 (1936).

Ohne Beweis werden folgende Theoreme angegeben: 1. Definition des Integrals

$$L = \int_{X_0}^x a(f(x), x, g_1(x), \dots, g_n(x)) db(f(x), x, g_1(x), \dots, g_n(x)).$$

Es sei $f(x)$ in $X_0 \leq x \leq X_1$

eine Funktion, die durch stetige Funktionen $f_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots$) approximiert werden kann, und es seien $g_1(x), \dots, g_n(x)$ stetige Funktionen mit beschränkter Totalvariation; dann läßt sich L eindeutig erklären als der Limes

$$L = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{X_0}^x a(f_k(x), x, g_1(x), \dots, g_n(x)) db(f_k(x), x, g_1(x), \dots, g_n(x)),$$

wenn a und b in einem gewissen angegebenen Bereich stetige Ableitungen nach ihren Argumenten besitzen. 2. Existenz der „Lösung“ $u(x)$ einer „gewöhnlichen Differential-

gleichung“ $du(x) = a_0(f(x), g_i(x), u(x)) df(x) + \sum_{i=1}^n a_i(f(x), g_i(x), u(x)) dg_i(x)$ mit $u(0) = 0$. Darunter wird verstanden: Man ersetze die Differentialgleichungen durch eine Folge von Differentialgleichungen, indem man $f(x)$ ersetzt durch eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen $f_k(x)$ mit $f_k(0) = 0$, die mit $k \rightarrow \infty$ gegen $f(x)$ streben und die stetigen Funktionen $g_i(x)$ ersetzt durch stetig differenzierbare Funk-

tionen $g_{ik}(x)$, die mit $k \rightarrow \infty$ derart gegen $g_i(x)$ streben, daß die totale Variation von $g_{ik}(x) - g_i(x)$ gegen Null geht und die totalen Variationen von $g_{ik}(x)$ gleichmäßig beschränkt bleiben. Unter gewissen Voraussetzungen für a_0, \dots, a_n konvergieren die Lösungen $u_k(x)$ mit $u_k(0) = 0$ dieser Differentialgleichungen gegen eine Funktion $u(x)$, deren Betrag eine angegebene Schranke nicht überschreitet; sie heißt Lösung der obigen Gleichung. 3. Entsprechend wird die Existenz einer verallgemeinerten

Lösung behauptet für das hyperbolische Anfangsproblem $\sum_{k=1}^n a_{ik} \frac{\partial \varphi_k}{\partial \alpha} = 0, i=1, \dots, m < n;$

$\sum_{k=1}^n a_{ik} \frac{\partial \varphi_k}{\partial \beta} = 0, i = m+1, \dots, n; n \geq 2$, wobei $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ auf $\alpha - \beta = 0$ vor-

gegeben ist. 4. Dieses letzte Theorem wird verwendet zum Beweis von Konvergenzsätzen für analytische Lösungen von Folgen elliptischer, Monge-Ampèrescher Differentialgleichungen, deren Koeffizienten analytische Funktionen der Argumente $u, v, x, p = \frac{\partial x}{\partial u}, q = \frac{\partial x}{\partial v}$ sind; ein ausführliches Referat sei bis zur Publikation der vollständigen Beweise verschoben.

Rellick (Marburg, Lahn).

Temliakow, A.: Zu dem Wachstumsproblem der harmonischen Funktionen des dreidimensionalen Raumes. Rec. math. Moscou 42, 707—716 (1935).

The material in this paper coincides in part with that indicated previously by the author in the C. R. Acad. Sci. Paris 200, 799 (1935) (this Zbl. 11, 71). Let (r, θ, φ) be the spherical coordinates of (x, y, z) . Let

$$F(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (A_{nm}^{(1)} \cos m\varphi + A_{nm}^{(2)} \sin m\varphi) r^n P_n^{(m)}(\cos \theta),$$

where the P 's are Legendre's functions and the A 's constants, be everywhere harmonic. Let

$$f(u, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{(n+m)!}{n!} \left(A_{nm}^{(1)} \frac{\cos mt}{i^m} + A_{nm}^{(2)} \frac{\sin mt}{i^m} \right) u^n,$$

so that $2\pi F = \int_0^{2\pi} f(x + iy \cos t + iz \sin t, t) dt$, and f corresponds to F in the sense

of Whittaker-Bergmann (for references to Bergmann's work in this direction see the above C. R.-note). The author defines the order $\lambda(F)$ and type $\sigma(F)$ of F by replacing the circle by a sphere in the usual definition for entire functions. He proves that, for each t , λ equals the order, and, in the case of axial symmetry, σ equals the type of the entire function f . An expression for λ in terms of the A 's is obtained. In the latter part of the paper, he derives a formula, due to and printed with Bergmann's permission, expressing f in terms of the values of F in its real domain in the case of axial symmetry.

J. J. Gergens (Rochester).

Boggio, T.: Sull'integrazione delle equazioni idrodinamiche di Helmholtz. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 21, 415—419 (1935).

Verf. zeigt, daß man die Differentialgleichungen von Helmholtz integrieren und die Integrale von Cauchy erhalten kann einzig unter Benutzung der Eulerschen Variablen. Bisher war der Umweg über die Lagrangeschen Variablen üblich.

Weinstein (Genf)._o

Agostinelli, Cataldo: Sopra la ripartizione delle acque di una sorgente piana. Atti Ist. Veneto Sci. etc. 44, 635—648 (1935).

Verf. untersucht den Ausfluß von n freien Strahlen aus einem gemeinsamen Quellpunkt bzw. den Zufluß nach einem gemeinsamen Senkpunkt. Es wird die Methode von T. Boggio (vgl. vorst. Ref.) benutzt, der nur die Anwesenheit von Staupunkten angenommen hatte.

Weinstein (Genf)._o

Reissner, Erich: Allgemeine Integration der Plattengleichung bei linear veränderlicher Steifigkeit. *Ing.-Arch.* **7**, 80—82 (1936).

The differential equation of an isotropic plate whose stiffness is a linear function of x is

$$N_0 x \Delta \Delta w + 2N_0 \Delta w_x = p(x, y).$$

For the homogeneous equation the author derives the solution

$$w = f_1(\xi) + f_2(\eta) + \frac{1}{4} \int \log(\xi + \eta) [f_3(\xi) d\xi + f_4(\eta) d\eta],$$

where $\xi = x + iy$ and $\eta = x - iy$.

Holl (Ames)._o

Variationsrechnung:

Janet, Maurice: Dualité dans certaines questions de calcul des variations. *J. Math. pures appl.*, IX. s. **15**, 177—191 (1936).

Verf. geht von der Tatsache aus, daß sich die Eigenwerte des Integralausdruckes $v(x) = \int_{x_0}^{x_1} K(x, y) u(y) dy$ durch Extrema sowohl von $\int_{x_0}^{x_1} u(x) v(x) dx : \int_{x_0}^{x_1} v^2(x) dx$ wie auch von $\int_{x_0}^{x_1} u^2(x) dx : \int_{x_0}^{x_1} u(x) v(x) dx$ kennzeichnen lassen, und bespricht ihre Anwendung auf das Sturm-Liouvillesche Eigenwertproblem.

K. Friedrichs.

Blaschke, Wilhelm: Integralgeometrie. XIV. Ein Gegenseitigkeitsgesetz der Optik. *Math. Ann.* **113**, 110—112 (1936).

Das Bestehen der optischen Reziprozitätsgesetze in beliebigen Medien ist gleichbedeutend mit der Existenz von gewissen Poincaréschen Integralinvarianten oder, was auf dasselbe hinausläuft, von Extremalen- oder Strahlendichten im Sinne des Verf. (vgl. dies. Zbl. **14**, 119). Dies ist für 2 Reziprozitätssätze von Herzberger (Strahlenoptik, Berlin 1931) benutzt worden. Von der Strahlendichte für die ∞^4 Strahlen in einem beliebigen räumlichen Medium ausgehend, gelangt der Verf. zu einem allgemeineren Reziprozitätsgesetz, das für speziellere Medien von Straubel, Gleichen [Physik. Z. **4**, 114 bzw. 226 (1903)] und Levi-Civita [Atti Accad. naz. Lincei, Rend., V. s. **24**, 666 (1915)] gefunden wurde. Man lege die Strahlen durch kanonische Koordinaten $x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3$ fest und betrachte eine unendlich dünne, vierparametrische Schar von Strahlen, die von einem Flächenelement f ausgehen; φ bezeichne das Flächenelement, das von den Endpunkten der Vektoren p erfüllt wird, wenn sie von einem Punkt abgetragen werden, und ω den Winkel zwischen der Strahlrichtung und dem Normalvektor von f . Dann ist $f\varphi \cos \omega$ gleich dem entsprechenden Ausdruck für ein beliebiges anderes durch dieselben Strahlen gelegtes Flächenelement. Fenchel.

Manià, B.: Sopra un problema di navigazione di Zermelo. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend.*, VI. s. **23**, 292—295 (1936).

Ankündigung eines Existenzbeweises für die im Titel genannte Minimaufgabe von Zermelo (dies. Zbl. **1**, 341).

Rellich (Marburg, Lahn).

Weinstein, A.: On a minimal problem in the theory of elasticity. *J. London Math. Soc.* **10**, 184—192 (1935).

The problem of the stability of a square plate with four clamped edges may be formulated mathematically as follows. Consider the class of all even functions $w(x, y)$ which have continuous derivatives of the fourth order in the square S and which satisfy the conditions $w = 0, \frac{\partial w}{\partial n} = 0$ on its boundary C . It is required to find the least value λ of the expression $I(w)/D(w)$ where $I(w) = \iint_S (w_{xx} + w_{yy})^2 dx dy$, $D(w) = \iint_S (w_x^2 + w_y^2) dx dy$. The function w which renders I/D a minimum satisfies

the differential equation $\Delta \Delta w + \lambda \Delta w = 0$

with the stated boundary conditions. Using the principle that if in a minimum problem some of the conditions are made less stringent the minimum value in the modified

problem cannot be greater than in the original problem the author seeks the least value μ_m of the expression $I(v)/D(v)$ for all even functions $v(x, y)$ which vanish on the boundary C and which satisfy the m boundary conditions

$$\int_C \frac{dv}{dn} g_{2k-1} ds = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

where

$$g_\nu = \cosh \frac{\nu\pi}{2} \cos \nu x \quad \text{on the sides } y = \pm \frac{1}{2}\pi$$

and

$$g_\nu = \cosh \frac{\nu\pi}{2} \cos \nu y \quad \text{on the sides } x = \pm \frac{1}{2}\pi.$$

Then μ_m is not greater than λ and μ_m is a non-decreasing function of m . It is found that $\mu_1 = 5,1550$, $\mu_2 = 5,30196$, $\mu_3 = 5,30357$, $\mu_4 = 5,30362$. The method of Ritz is employed to show that $\lambda < 5,31173$. By combining the two results λ is confined between the narrow limits 5,30362 and 5,31173. Reference is made by the author to the paper G. I. Taylor [Z. angew. Math. Mech. **13**, 147—152 (1933); Zbl. Mech. **1**, 157] who showed that $\lambda < 5,33$.

H. W. March (Madison, Wisc.).

Weinstein, A.: On the symmetries of the solutions of a certain variational problem. Proc. Cambridge Philos. Soc. **32**, 96—101 (1936).

The problem of the stability of a square plate with four clamped edges can be formulated as a minimum problem [A. Weinstein, C. R. **200**, 107 (1935); Zbl. Mech. **3**, 105 and the prec. ref. E. Trefftz, Z. angew. Math. Mech. **15**, 339 (1935); Zbl. Mech. **4**, 299]. In the present paper it is shown that every minimizing function is an even function of each of its two arguments x and y .

H. W. March (Madison, Wisc.).

Funktionentheorie:

Barba, G.: Sulla iterazione di una classe di funzioni. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **23**, 473—477 (1936).

L'auteur cherche à faciliter l'étude de l'itération d'une fonction rationnelle f en transformant cette fonction par une autre fonction g convenablement choisie. Il indique que l'on peut trouver une fonction automorphe g , telle que la transformée g^{-1}/g de f par g soit linéaire; son itération est alors immédiate. Par exemple l'itération de $2x^2 - 1$ se ramène à celle de $2z$ en transformant par $x = \cos z$. E. Blanc (Paris).

Ciorănescu, Nicolas: Sur les zéros des fonctions méromorphes et de certaines classes de polynômes. Bull. Math. Soc. Roum. Sci. **37**, H. 2, 9—11 (1936).

If $f(z)$, $\bar{f}(z)$, $F(z)$, and $\bar{F}(z)$ are holomorphic at $z = 0$, $f(0) = \bar{f}(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$, $f(z) \ll \bar{f}(z)$, $F(z) \ll \bar{F}(z)$, the author has proved that $F[f(z)] \ll \bar{F}[\bar{f}(z)]$ (this Zbl. **13**, 357). Taking $F(z) = [a_0 + z]^{-1}$, $\bar{F}(z) = [\bar{a}_0 - z]^{-1}$, the author finds that the roots of the equation $f(z) = a_0$ are on or outside the circle $|z| = \rho$ passing through the root of $\bar{f}(z) = \bar{a}_0$ which is nearest to the origin. Applications to the case in which the coefficients of $f(z)$ are dominated by binomial coefficients and to a theorem of Montel (this Zbl. **3**, 157).

E. Hille (New Haven, Conn.).

Menchoff, D.: Sur la monogénéité asymptotique. Rec. math. Moscou, N. s. **1**, 189—210 u. franz. Zusammenfassung 210 (1936) [Russisch].

A complex function is said to be approximately monogenic at a point z_0 if it possesses the finite approximate differential coefficient at z_0 , i.e. if there is a set E of density 1 at z_0 such that the limit $[f(z) - f(z_0)]/(z - z_0)$ exists and is finite, as z tends to z_0 on E . There is established the following theorem which is the generalization of the classical Cauchy-Goursat theorem and has been enunciated without proof in the recent monograph by the author (D. Menchoff, Les conditions de monogénéité, Paris 1936, esp. p. 49; this Zbl. **14**, 167): If a continuous complex function is approximately monogenic everywhere in an open region D , except perhaps at an enumerable set of points, then it is holomorphic in D . — Incidentally there is given a new shorter proof of an other previous result of the

author [Fundam. Math. 25, 59—97 (1935); this Zbl. 12, 82): If $f(z)$ is a continuous complex function in an open region D and if at any point z_0 , except possibly at an enumerable set, the quotient $[f(z) - f(z_0)]/(z - z_0)$ has the same finite limit as z tends to z_0 along two arbitrary straight-lines through z_0 ; then $f(z)$ is holomorphic in D .

Saks (Warszawa).

Golusin, G. M.: Über die Verzerrungssätze der schlichten konformen Abbildungen. Rec. math. Moscou, N. s. 1, 127—134 u. dtsch. Zusammenfassung 135 (1936) [Russisch].

Let $F(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ be analytic and univalent (schlicht) in $|z| < 1$. The author shows that the known results of Löwner [Math. Ann. 89, 103—121 (1923)] can be successfully applied for evaluation of various upper bounds associated with $F(z)$, other than the upper bounds of the coefficients $|a_2|, \dots$. In addition to known inequalities of Bieberbach, Nevanlinna, Grunski, and Grötsch (for which the author gives new proofs) the author derives the following estimates and shows that they cannot be improved

$$|\arg F'(z)| \leq 4 \arcsin |z| \quad \text{or} \quad \pi + \log \frac{|z|^2}{1 - |z|^2},$$

according as $|z| \leq 2^{-1/2}$ or $2^{-1/2} < |z|$,

$$\left| \arg \frac{z^2 F'(z)}{F(z)^2} \right| \leq -\log(1 - |z|^2).$$

J. D. Tamarkin.

Herrmann, Aloys: Zur Erzeugung von hyperanalytischen Funktionen einer Quaternionenvariablen aus einer gewöhnlichen analytischen Funktion. Deutsche Math. 1, 358—362 (1936).

Verf. legt Untersuchungen über die Quaternionen von L. E. Dickson, J. H. M. Wedderburn und Weyr dieser Arbeit zugrunde. Es wird eine Normalform für die Quaternionenfunktionen angegeben, die in gewissen Fällen einen einfachen Übergang von der Quaternionenfunktion zu einer entsprechenden analytischen Funktion $f(z)$ ermöglicht.

Behnke (Münster i. W.).

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Versicherungsmathematik:

● **Mises, Richard von:** Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit. Einführung in die neue Wahrscheinlichkeitslehre und ihre Anwendung. 2., neubearb. Aufl. (Schriften z. wiss. Weltauffassung. Hrsg. v. Philipp Frank u. Moritz Schlick. Bd. 3.) Wien: Julius Springer 1936. VIII, 282 S. RM. 16.—.

Es handelt sich um die zweite umgearbeitete Auflage des Werkes, in welchem der Verf. im Jahre 1928 eine klare, tief sinnige und jedermann zugängliche Darlegung seiner Gesichtspunkte betreffs der Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihrer Funktion in der Statistik und allgemein in den beobachtenden Wissenschaften veröffentlicht hat. Es ist hier nicht der Ort, diese Gesichtspunkte nochmals wiederzugeben, zu diskutieren oder andersartigen Gesichtspunkten gegenüberzustellen, sondern es soll vielmehr auf einige der wichtigen Ergänzungen hingewiesen werden, die dem Werk hinzugefügt wurden, um einerseits die Ausführungen noch klarer erscheinen zu lassen (wie z. B. die Einführung eines lehrreichen Beispiels im 2. Vortrag), und vor allem, um einigen späteren Einwendungen und neueren wissenschaftlichen Entwicklungen Rechnung zu tragen. Auf die Einwände wird vor allem im stark erweiterten 3. Vortrag geantwortet; besonders interessant ist die Verteidigung des „Regellosigkeitsaxioms“, das besonders stark der Kritik und Verbesserungsversuchen ausgesetzt war. Die auf neuere wissenschaftliche Entwicklungen bezüglichen Zusätze betreffen natürlich in erster Linie die theoretische Physik, deren sämtliche neueren Fortschritte vom Verf. kritisch unter dem Gesichtspunkt ihrer Bedeutung für den Wahrscheinlichkeitsbegriff untersucht werden, bis zu der Heisenbergschen Theorie, deren philosophische Bedeutung für die Vereinheitlichung des physikalischen Weltbildes hervorgehoben wird.

Bruno de Finetti (Trieste).

Feller, Willy: Zur Theorie der stochastischen Prozesse. (Existenz- und Eindeutigkeitssätze.) *Math. Ann.* **113**, 113—160 (1936).

Diese Arbeit kann als eine wesentliche Ergänzung und Weiterführung der bekannten Kolmogoroffschen Untersuchungen über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung (*Math. Ann.* **104**, dies. Zbl. **1**, 149) angesehen werden. Zunächst werden die beiden Kolmogoroffschen partiellen Differentialgleichungen unter verallgemeinerten Voraussetzungen abgeleitet (insbesondere wird keine Momentenexistenz gefordert). Für diese Gleichungen wird dann unter sehr allgemeinen Bedingungen die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen bewiesen; das geschieht im Rahmen einer allgemeinen Untersuchung über parabolische Differentialgleichungen, die auch rein analytisch von Interesse ist. Im folgenden wird dieselbe Methode auch auf unstetige stochastische Prozesse angewandt und führt hier zu Integrodifferentialgleichungen, für welche ebenfalls unter gewissen Voraussetzungen allgemeiner Natur Existenz- und Eindeutigkeitssätze aufgestellt werden. Ein besonderer Abschnitt ist dem „rein unstetigen“ Prozeß gewidmet, bei welchem die Änderungen nur sprungweise erfolgen können; die Behandlung dieses Falles erweist sich als besonders einfach, da man hier mit gewöhnlichen Differentialgleichungen auskommt. — Die Beweise sind sehr ausführlich und klar dargelegt. *A. Khintchine* (Moskau).

Kac, M.: Quelques remarques sur les fonctions indépendantes. *C. R. Acad. Sci., Paris* **202**, 1963—1965 (1936).

Grenzwertsätze über Folgen gegenseitig unabhängiger Funktionen (vgl. *Steinhaus*, dies. Zbl. **14**, 206), die sich sämtlich auch wahrscheinlichkeitstheoretisch deuten lassen und in dieser Deutung leicht aus bekannten Tatsachen gefolgert werden können. Beim letzten Satz wird das wahrscheinlichkeitstheoretische Analogon explizit angegeben: Die

Bedingung $\sum_{k=1}^n b_k = o(n^2)$, wo die b_k die Streuungen der gegenseitig unabhängigen

Summanden bedeuten, sei für das Bestehen des Gesetzes der großen Zahlen notwendig. In dieser Fassung ist der Satz bekanntlich falsch; vielmehr muß, damit die Behauptung richtig wird, noch das (nicht einfache) wahrscheinlichkeitstheoretische Analogon der Forderung der „gleichmäßigen Integrierbarkeit“ hinzugefügt werden. — Beweise werden nicht angeführt. *A. Khintchine* (Moskau).

Geiringer, Hilda: Zur Verwendung der mehrdimensionalen Normalverteilung in der Statistik. *Mh. Math. Phys.* **43**, 425—434 u. **44**, 97—112 (1936).

Kriterien zur Beurteilung, ob eine mehrdimensionale statistische Aufnahme durch eine Gaußsche Verteilung interpretierbar ist, wobei die Parameter der letzteren freigelassen werden. Der Gedankenkreis und die verwandten Methoden schließen sich eng an frühere Arbeiten der Verf. an, vgl. insbesondere die Darstellungen in dies. Zbl. **8**, 265 u. **12**, 112 (ferner auch **8**, 368 u. **11**, 218). *W. Feller* (Stockholm).

Doebelin, Wolfgang: Sur les chaînes discrètes de Markoff. *C. R. Acad. Sci., Paris* **203**, 24—26 (1936).

Eine Reihe von Sätzen über einfache Markoffsche Ketten mit endlicher Anzahl von möglichen Zuständen. Als Beispiele mögen folgende Behauptungen dienen: Es gibt eine gewisse Anzahl von Zustandsgruppen G_1, \dots, G_k , „Endgruppen“ (groupes finaux) genannt, so daß das System, wenn es einmal in einen Zustand der Gruppe G_i gekommen ist, diese Gruppe nicht mehr verlassen kann; dabei konvergiert die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das System sich bei der n -ten Beobachtung außerhalb $\sum_{i=1}^k G_i$ befindet, bei $n \rightarrow \infty$ gegen Null; befindet sich das System einmal in einem Zustande der Gruppe G_i , so besteht die Wahrscheinlichkeit 1 dafür, daß es durch jeden Zustand dieser Gruppe unendlich oft hindurchgeht. Beweise werden nicht angegeben.

A. Khintchine (Moskau).

Onicescu, Octav, et G. Mihoc: Sur les chaînes statistiques. C. R. Acad. Sci., Paris 202, 2031—2033 (1936).

Es handelt sich um die von Verff. in Verallgemeinerung der Markoffschen Ketten eingeführten, in dies. Zbl. 12, 28 referierten „chaines en liaisons complètes“. An einem Beispiel wird gezeigt, wie sie sich unter Umständen auf Markoffsche Ketten zurückführen lassen.

W. Feller (Stockholm).

Böhm, Friedrich: Grundfragen der angewandten Wahrscheinlichkeitsrechnung und der theoretischen Statistik, insbesondere das Problem der reinen Gruppen. Arch. math. Wirtsch. u. Sozialforschg 2, 17—33 u. 69—97 (1936).

Eingehende und sehr klare Besprechung sämtlicher Schriften von K. Marbe zur Theorie des „statistischen Ausgleichs“ sowie ihrer Kritik durch Bortkiewicz, Mises und Kamke.

A. Khintchine (Moskau).

Insolera, Filadelfo: A proposito di un ipotetico comportamento assintotico della mortalità. Rend. Circ. mat. Palermo 49, 303—306 (1935).

Zelenka, Ant.: Versicherungsmathematische Werte bei Zinsfußänderungen. Aktuár. Vědy 6, 9—20 (1936).

Jecklin, Heinrich: Retrospektive Reserveberechnung nach Gruppen gleichen Akquisitionsjahres. Aktuár. Vědy 6, 21—28 (1936).

Wald, A.: Über die Produktionsgleichungen der ökonomischen Wertlehre. (II. Mitt.) Erg. math. Kolloqu. H. 7, 1—6 (1936).

In einer früheren Mitteilung (vgl. dies. Zbl. 10, 407) hat der Verf. für ein von Schlesinger vorgeschlagenes System von Produktionsgleichungen Existenz und Eindeutigkeit der Lösung unter einer einschneidenden, ökonomisch nicht zu rechtfertigenden Voraussetzung bewiesen. Hier wird der Beweis unter sehr viel allgemeineren, ökonomisch begründeten Annahmen durchgeführt.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Geometrie.

Neumann, J. v.: Continuous geometry. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 22, 92—100 (1936).

A brief discussion of the consequences of a self-dual system of axioms for projective geometry which avoids the notion of points altogether and whose “undefined entities” represent the linear subspaces of the given space. In particular, it is required that the class L of all elements be partially ordered and continuous with respect to an undefined relation “ $<$ ” which is transitive, but non-reflexive. A defined equivalence of elements partitions L into a unique and completely ordered set of equivalence-classes. Thence a unique, additive, numerical dimension-function $D(a)$ for all $a \in L$ is defined and so normalized that the range of D is either the set $D_n = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\right)$

for some $n = 1, 2, \dots$, or the set D_∞ of all real numbers on the closed interval $(0, 1)$. When $D = D_n$, L is the set of all linear subspaces of an $n - 1$ -dimensional projective space P_{n-1} . When $D = D_\infty$, L is an entirely new type of geometry. — A detailed treatment to appear soon will include a discussion of the close connection between the present study and recent work of the author and F. C. Murray on operator rings Ann. of Math. 37, 116—229 (1936); this Zbl. 14, 161. J. L. Dorroh (Baltimore).

Neumann, J. v.: Examples of continuous geometries. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 22, 101—108 (1936).

Examples of geometries satisfying the axioms of the author's preceding note (see the prec. rev.). Examples are given both of $L = L_n$ for the case $D = D_n$ and of $L = L_\infty$ for the case $D = D_\infty$. A dimensional distance $\delta(a, b)$ for $a, b \in L$ is defined and δ defines a metric in L . The range of δ is the same as that of D so that it does not lead to an interesting topology in L_n , but it does impose a significant topo-

logy on L_∞ . L_∞ is complete and connected in the topology with respect to δ . Every L satisfying the axioms gives rise to an associated division algebra. Further details will appear in the future paper mentioned in the author's preceding note. *Dorroh*.

Toda, Kiyoshi: Theorems relating to Feuerbach's theorem. *Tôhoku Math. J.* **42**, 128—131 (1936).

Einige Sätze über Zykel und Speere.

Rehbock (Bonn).

Rossier, P.: Relations focales entre des coniques osculatrices à une courbe et applications à la catoptrique. *Arch. Sci. Physiques etc.* **18**, 147—153 (1936).

Graf, Ulrich: Über eine anschauliche Deutung der Kreiskörper mit Hilfe der zyklographischen Projektion. *Tôhoku Math. J.* **42**, 103—113 (1936).

Durch die zyklographische Projektion wird jedem Punkte $(z, w) = (u, v; x, y)$ des R_4 eineindeutig die orientierte Kugel $(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - u)^2 = (\pm v)^2$ im R_3 mit den rechtwinkligen Koordinaten ξ, η, ζ zugeordnet. Verf. behandelt die so entstehenden Bilder der Kreise analytischer Ebenen und setzt aus diesen Bildern die Bilder der Kreiskörper zusammen.

Behnke (Münster i. W.).

Aumann, Georg: Über einen elementaren Zusammenhang zwischen Mittelwerten, Streckenrechnung und Kegelschnitten. *Tôhoku Math. J.* **42**, 32—37 (1936).

In einem Intervall der x -Achse sei ein Mittel gegeben, d. h. eine stetige, symmetrische Funktion $m(x_1, x_2)$, die in jeder Variablen monoton wächst und deren Wert stets zwischen x_1 und x_2 liegt. Mit Hilfe von m läßt sich die Gleichheit zweier Strecken (x_1, x_2) und (y_1, y_2) durch $m(x_1, y_2) = m(x_2, y_1)$ definieren. (Ist m das arithmetische Mittel, so erhält man die gewöhnliche Streckengleichheit.) Verf. zeigt, daß dieser von selbst reflexive und symmetrische Gleichheitsbegriff dann und nur dann transitiv ist, wenn m ein quasiaarithmetisches (= transformiertes arithmetisches) Mittel ist. Faßt man x als Parameter auf einem Kurvenbogen auf, so läßt sich in dieser Weise durch Vermittlung von m eine Streckengleichheit auf der Kurve einführen. Ist der Bogen konvex, so erhält man ein Mittel m , indem man den Punkten x_1 und x_2 denjenigen Punkt zuordnet, in dem die Tangente der Sehne x_1, x_2 parallel ist. Transitivität dieses Mittels ist gleichbedeutend mit der Gültigkeit des Pascalschen Satzes für Sechsecke mit paarweise parallelen Gegenseiten. Hierfür erweist sich als notwendig (und trivialerweise hinreichend), daß die Kurve ein Kegelschnitt ist. Der Parameter, für den das Mittel in das arithmetische übergeht, ist, wie leicht zu sehen, die Affinbogenlänge.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Segre, B.: Intorno alle ovali sgheembe, e su di una estensione del teorema di Cavalieri-Lagrange alle funzioni di due variabili. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend.*, VI. s. **23**, 654 bis 656 (1936).

1. Es sei C eine Jordankurve im R_3 . Wieviele Ebenenbüschel B gibt es zu C derart, daß jedes, zur Büschelachse fremde, von C berandete, hinlänglich „reguläre“ Flächenstück F (mindestens) eine Tangentialebene aus B mit Berührungspunkt „im Innern“ von F besitzt? Die Frage wird für den Fall behandelt, daß C speziell eine beschränkte, mit scharfer Tangente und stetiger Schmiegeebene versehene Jordankurve C_4 von vierter Ordnung ist, welche keine Trisekante besitzt. [In einer inzwischen erschienenen Arbeit „Über reelle geschlossene Raumkurven vierter Ordnung“, *Math. Ann.* **112**, 743—766 (1936); dies. Zbl. **14**, 35, hat P. Scherk gezeigt, daß dann die C_4 ganz auf dem Rande ihrer konvexen Hülle liegt, wenigstens falls C_4 überall eine scharfe Schmiegeebene besitzt.] Es ergibt sich: Auf jeder zur C_4 fremden Ebene existiert genau eine Gerade g , welche Achse eines Büschels B ist; B enthält dann auch zwei, die C_4 doppelt berührende Ebenen, deren Berührungspunkte sich auf der C_4 wechselseitig trennen. — 2. Angabe verschiedener Eigenschaften der C_4 (vgl. aber auch Scherk a. a. O.). — 3. Erörterung einer, 1. entsprechenden Aufgabe, wenn an Stelle von C ein ebener Schnitt eines Zylindermantels Z tritt und wenn der Normalschnitt von Z die Begrenzung eines einfach zusammenhängenden (ebenen) Gebietes ist. — Eine ausführliche Darstellung wird in Aussicht gestellt.

Haupt (Erlangen).

Coxeter, H. S. M.: The representation of conformal space on a quadric. *Ann. of Math.*, II. s. **37**, 416—426 (1936).

M. Bôcher hat nachgewiesen [*Bull. Amer. Math. Soc.* **20**, 185—200 (1914)], daß der Konformraum C_n (= der Raum der Inversionsgeometrie, s. F. Morley, *Inversive Geometry*, London 1933; dies. Zbl. **9**, 29) aus dem Euklidischen oder aus dem projektiven Raum P_{n+1} durch Adjunktion eines uneigentlichen (idealen) Kegels erhalten werden kann. Im zweidimensionalen Falle C_2 zerfällt dieser Kegel in ein schneidendes Geradenpaar, und der zugehörige vollständige Konformraum ist auf eine gewöhnliche Quadrik abbildbar. — Die von O. Veblen angeregte vorliegende Abhandlung arbeitet die analoge Abbildung der drei- und vierdimensionalen Konformräume C_3 und C_4 auf Hyperquadriken des projektiven P_4 bzw. P_5 heraus. Dies erfolgt unter Benutzung der folgenden geometrischen Tatsache: Wird eine Hyperquadrik des P_{n+1} von einem ihrer Punkte O aus in einen P_n projiziert, so wird dadurch eine $(1, 1)$ -Korrespondenz zwischen denjenigen Punkten der Hyperfläche, die nicht in der Berührungsebene von O liegen, und denjenigen Punkten des P_n hergestellt, die nicht in einem gewissen P_{n-1} liegen. Der C_n wird dann durch Adjunktion der übrigen Punkte der Hyperfläche gewonnen, d. h. durch Hinzufügen von O und seinem isotropen Kegel. Damit kann dann gleichzeitig auch die Geometrie der isotropen Räume I_n , die identisch ist mit der Geometrie eines Kegels, der einen (von der Spitze verschiedenen) spezialisierten Punkt besitzt, miteinfaßt und behandelt werden. Man kann sich dabei allgemein auf die Fälle n ungerade, $\frac{1}{2}n$ ungerade, $\frac{1}{2}n$ gerade beschränken. Dies aber allgemein durchzuführen ist mühsam, so daß sich der Verf. in dieser Arbeit auf die Betrachtung der Verhältnisse im C_4 und in seinen Unterräumen $C_3, C_2; I_3, I_2$ beschränkt. Für sie werden der Reihe nach die bei Konfigurationen üblichen Inzidenztafeln der Elemente der Unterräume angegeben, zum Schluß die bisher mit synthetischen Methoden durchgeführte Untersuchung mit solchen der algebraischen Geometrie vertauscht.

M. Steck (München).

Buzano, Piero: Condizioni di incidenza per due iperspazi subordinati di uno stesso iperspazio. *Atti Accad. Sci. Torino* **71**, 196—204 (1936).

Considérons dans un S_n projectif deux espaces subordonnés, S_h et S_k , définis respectivement au moyen de $h+1$ et de $k+1$ points linéairement indépendants, X^r et Y^s . Les coordonnées projectives homogènes de ceux-ci,

$$\begin{aligned} X^r: & x_0^r, x_1^r, \dots, x_n^r & (r = 0, 1, \dots, h) \\ Y^s: & y_0^s, y_1^s, \dots, y_n^s & (s = 0, 1, \dots, k), \end{aligned}$$

constituent deux matrices rectangulaires, dont les déterminants d'ordre $h+1$ et $k+1$ formés avec les colonnes d'indices i_0, i_1, \dots, i_h et j_0, j_1, \dots, j_k peuvent ordonnément être indiqués avec les symboles $(i_0 i_1 \dots i_h)_x$ et $(j_0 j_1 \dots j_k)_y$, et sont notoirement les coordonnées grassmanniennes de S_h et S_k . — E. D'Ovidio [*Atti Accad. naz. Lincei, Mem.*, III. s. **1** (1877)] a donné des conditions pour que S_h et S_k se coupent suivant un S_p , sous la forme:

$$\sum (-1)^\omega (j_0 j_1 \dots j_{h-p} i_1 i_2 \dots i_p)_x (j_{h-p+1} \dots j_{h+k-2p+1} i_1 i_2 \dots i_p)_y = 0. \quad (*)$$

Ici: i_1, i_2, \dots, i_p sont p indices différents, fixés ad libitum parmi les nombres $0, 1, \dots, n$; $j_0, j_1, \dots, j_{h+k-2p+1}$ sont $h+k-2p+2$ indices choisis parmi les $n-p+1$ qui restent; et la somme est faite par rapport à toutes les permutations de ce type, dont ω désigne la classe. — La nécessité des conditions (*) est prouvée dans le travail en question d'une façon plus rigoureuse que celle originelle de D'Ovidio. De plus, l'A. montre que lesdites conditions peuvent ne pas être suffisantes; afin que S_h et S_k se coupent suivant un S_l (avec $l > h+k-n$), il faut et suffit que les relations (*) subsistent pour toutes les valeurs entières non négatives de p comprises entre $h+k-n+1$ et l (ces deux nombres inclus). Beniamino Segre (Bologna).

Gambier, Bertrand: Enveloppe d'une famille de quadriques à un paramètre. *Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse*, III. s. 27, 201—240 (1935).

L'auteur développe la théorie des surfaces B [= de Blutel, *Ann. École norm.* 7 (1890)] énoncée dans sa Note (ce Zbl. 10, 373). En conservant les notations du référent cité, on a: B_1 est lieu de coniques C_1 ($Q=0, P_1=0$), B_2 — lieu de C_2 ($Q=0, P_2=0$). Si C_1, C_2 se coupent aux points J, J' , B_1 et B_2 se touchent le long de $(J), (J')$. Chaque quadrique du faisceau $Q_1 = Q + F(\lambda)P_1^2$ enveloppe le même B_1 et l'autre B_2 d'où suit la méthode de la transformation de B . Il existe toujours de cônes S dans le faisceau Q_1 . Soit K, K' deux points où C est coupée par la caractéristique de son plan, H, H' — les points de contact de B_1 avec les plans tangents de S qui passent par la tangente à la courbe — lieu de sommets de S . Les trois droites JJ', KK', HH' concourent. Si (K, K') coïncide avec (H, H') , il existe une quadrique Q_1 osculatrice à B le long de C ; les génératrices en sont les tangentes asymptotiques de B . Les équations paramétriques de B (en coordonnées homogènes) sont $x_i = P_i\mu^2 + 2Q_i\mu + R_i$ où $\lambda = \text{const}$, $\mu = \text{const}$ sont conjuguées, $\mu = \text{const}$ sont les coniques C et P_i, Q_i, R_i certaines fonctions de λ qui déterminent les courbes $\tau_i(P_i, Q_i, R_i)$ à tangentes parallèles. Représentation canonique suivant que les courbes τ_i sont gauches, planes ou droites. Étude des asymptotiques de B . *S. Finikoff*.

Algebraische Geometrie:

Libois, Paul: Étude projective de l'équation du quatrième degré. *Mathesis* 50, 189—191 (1936).

Haller, M. E.: Self-projective rational octavies. *Tôhoku Math. J.* 42, 38—53 (1936).

Mit denselben Methoden, die von anderen Verfassern schon angewendet worden sind (siehe z. B.: R. M. Winger und P. P. Stucky, dies. Zbl. 7, 223—224; J. A. Carlson, *Univ. Washington* 1934, 59—63) und die hier als bekannt vorausgesetzt werden, untersucht Verf. die rationalen ebenen C^8 , die durch die Kollineationen einer Gruppe in sich transformiert werden. Er gibt 40 Typen solcher C^8 : 25 besitzen eine zyklische Gruppe, 12 eine Diedergruppe, 2 eine kontinuierliche einparametrische Gruppe und 1 die Oktaedergruppe. Immer werden die parametrischen Gleichungen angegeben und in einer Tafel zusammengefaßt. Für 12 derselben werden auch die ternären Gleichungen ausgerechnet; es sind diese die interessantesten, nämlich die 2, die eine unendliche Gruppe gestatten, und diejenigen, die eine zyklische oder eine Diedergruppe der größten Ordnung besitzen. Die Diskussion betrachtet hauptsächlich die mehrfachen Punkte jener Kurven und die Bestimmung ihrer Plücker'schen Äquivalenten. *E. G. Togliatti*.

Maxwell, Edwin A.: On the geometrical genus of certain surfaces. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 32, 185—193 (1936).

The author calculates the geometrical genus of certain classes of irregular surfaces in ordinary space, for which the equations of the canonical system can be determined explicitly. Extensions to varieties in higher space are given. *J. A. Todd*.

Gambier, Bertrand: Étude des surfaces cubiques admettant des points d'Eckardt. *Bull. Acad. Roy. Belg.*, V. s. 22, 591—605 (1936).

Continuation du travail paru à p. 510—524 du même volume (ce Zbl. 14, 36). — Ici l'A. étudie les surfaces cubiques ayant 9, 3 ou 2 points d'Eckardt. Il dit incidemment que la surface cubique (avec 9 points d'Eckardt) $x^3 + y^3 + z^3 + t^3 + a^3(x + y + z) = 0$ admet 12 pentaèdres de Sylvester, ce qui vient contredire le critère classique de Plücker-Clebsch; effectivement ladite surface admet ∞^2 pentaèdres de Sylvester, puisque la forme cubique ternaire $x^3 + y^3 + z^3 + a^3(x + y + z)$ peut être mise de ∞^2 manières différentes sous la forme d'une somme de 4 cubes.

Beniamino Segre (Bologna).

Cherubino, Salvatore: Sulle varietà di Kummer singolari reali. *Rend. Semin. mat. Univ. Padova* 6, 141—176 (1935).

The author defines a generalised variety of Kummer of real type K_p to

be the image of an involution of order two on a real abelian variety V_p generated by an involutorial birational transformation T of V_p into itself which is pseudo-ordinary with respect to the fundamental symmetry S of V_p . These transformations have been introduced in an earlier paper of the author [Atti Accad. Sci. Napoli 20 (1935); this Zbl. 12, 222]. S induces a symmetry S^* on K_p which coincides with that induced by $S' = ST = TS$. The real points of K_p (i.e. those united in S^*) form a single sheet which is divided into a number of regions separated by branch points of the correspondence between K_p and V_p . The number of these sheets is $2^{p-\lambda} + 2^{p-\lambda'}$, where λ, λ' are the real characters of S and S' respectively. If T is ordinary, $\lambda = \lambda'$, but if T is singular it may happen that $\lambda > \lambda'$. The author concludes by discussing the case $p = 2$ in detail and determining all the hyperelliptic surfaces which possess pseudo-ordinary involutorial transformations. *J. A. Todd.*

Segre, B.: Sulle varietà di Veronese a due indici. I. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 23, 303—309 (1936).

Erster Teil einer Untersuchung über die (r, n) -Veroneseschen Mannigfaltigkeiten $\Phi^{(r)}$, die in der üblichen linearen Darstellung der Enveloppen 2. Klasse Q eines Raumes S_n auf die Punkte eines Σ_r mit $r = \frac{1}{2}n(n+3)$ den r -fach spezialisierten Q entsprechen ($r = 1, 2, \dots, n$). Die Reihe $\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \dots, \Phi^{(n)}$ von Mannigfaltigkeiten besitzt sehr bemerkenswerte Eigenschaften, deren Untersuchung von G. Scorza [Rend. Accad. Napoli (3) 21, 297 (1915)] angefangen worden ist und hier fortgesetzt wird. Jede $\Phi^{(r)}$ enthält die folgenden; die Punkte von $\Phi^{(n)}$ entsprechen eineindeutig und ausnahmslos den Punkten von S_n . Mit den $\Phi^{(r)}$ sind auch andere Mannigfaltigkeiten $\Pi^{(r)}$ und $\Xi^{(r)}$ eng verbunden (§ I): $\Pi^{(r)}$ liegt auf $\Phi^{(r)}$ und ist das Bild jener r -fach spezialisierten Enveloppen Q , deren Kerne auf einer gegebenen Quadrik \mathfrak{P} des S_n liegen; $\Xi^{(r)}$ ist das Bild eines S_{n-r} in der Abbildung von $\Phi^{(n)}$ auf S_n und ist eine $(n-r, n-r)$ -Veronesesche Mannigfaltigkeit. $\Pi^{(n)}$ fällt mit $\Phi^{(n)}$ zusammen; $\Pi^{(n-1)}$ hat die Ordnung $2\binom{2n-2}{n-1}$. Man kann allgemein $\Pi^{(r)}$ aus den $\Phi^{(r)}$ und dem Bild P der Enveloppe von \mathfrak{P} folgendermaßen konstruieren: man betrachte in Σ_r die Polarhyperebene π von P in bezug auf $\Phi^{(n)}$, d.h. das Bild der ∞^{r-1} Quadriken von S_n , die zur Enveloppe \mathfrak{P} apolar sind; $\Pi^{(r)}$ ist dann der Ort der Pole von π in bezug auf alle $\Xi^{(r)}$ (d.h. von den Schnitten von π mit den Räumen Σ_R , wo die $\Xi^{(r)}$ liegen). § II beschäftigt sich mit der Konstruktion der Tangentialräume und -kegel von $\Phi^{(r)}$ in ihren verschiedenen Punkten; $\Phi^{(r)}$ ist Ort der Räume Σ_R ; in allen Punkten eines solchen Σ_R , die für $\Phi^{(r)}$ einfach sind, ist der Tangentialraum von $\Phi^{(r)}$ immer derselbe. Wenn dagegen ein Punkt P von $\Phi^{(r)}$ auf $\Phi^{(s)}$ ($s > r$), aber auf keiner $\Phi^{(s')}$ mit $s' > s$ liegt, so hat $\Phi^{(r)}$ in P einen Tangentialkegel, welcher die Erzeugende Σ_s von $\Phi^{(s)}$ durch P als Spitze hat und sich nicht ändert, wenn P Σ_s durchläuft; man schließt daraus die Multiplizität von $\Phi^{(s)}$ für $\Phi^{(r)}$, die Konstruktion der ganzen Reihe $\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \dots, \Phi^{(n)}$ aus einer einzigen gegebenen $\Phi^{(r)}$, usw. *E. G. Togliatti (Genova).*

Beck, H.: Eine Cremonasche Raumgeometrie. J. reine angew. Math. 175, 129 bis 158 (1936).

L'A. commence par considérer l'algèbre non commutative du 3^e ordre définie par le tableau suivant:

	E_0	E_1	E_2
E_0	E_0	E_1	E_2
E_1	E_1	E_0	E_2
E_2	E_2	$-E_2$	0

il appelle ternions (Ternionen) ses nombres complexes $X = xE_0 + yE_1 + zE_2$, et les représente avec les points (x, y, z) d'un espace affine à 3 dimensions, nommé espace crémonien (Cremonaraum). Le chap. I est précisément dédié à l'algèbre

susdite, avec égard particulier aux opérations rationnelles entre ternions et à leurs représentations dans l'espace crémonien; le ternion $X = xE_0 + yE_1 + zE_2$ admet $\tilde{X} = xE_0 - yE_1 - zE_2$ comme complexe conjugué, et $X\tilde{X} = \tilde{X}X = (x^2 - y^2)E_0$ résulte la norme commune aux deux ternions X et \tilde{X} . — Les opérations renversables entre les ternions X et X' données par les formules:

$$X' = (XC + D)^{-1}(XA + B), \quad X' = (\tilde{X}C + D)^{-1}(\tilde{X}A + B),$$

avec A, B, C, D ternions arbitraires tels qu'il soit norme $(AD - BC) \neq 0$, constituent un groupe mixte dépendant de 11 paramètres essentiels; celui-ci se représente géométriquement avec un groupe de transformations quadratiques, définissant — dans l'espace crémonien — la géométrie des ternions (chap. II). — Le chap. III montre que cette géométrie peut être opportunément liée à la géométrie projective de S_4 . On peut présenter ce lien de la manière suivante (qui rend presque évidents beaucoup de résultats des chap. II et III): considérons un V_3^2 -cône réel de S_4 , ayant deux systèmes ∞^1 de plans réels, et projectons-le stéréographiquement sur un S_3 d'une façon opportune; en correspondance aux ∞^{11} transformations homographiques de V_3^2 en soi-même, on obtient de la sorte en S_3 les transformations fondamentales du groupe des ternions. — Le dernier chapitre (le IV^e) met en évidence et approfondit le fait remarquable que la géométrie des ternions a, dans le champ complexe, une structure identique à la géométrie élémentaire d'un espace euclidien S_4 , à la géométrie de Laguerre d'un espace euclidien S_3 , et à la géométrie projective d'un complexe spécial de droites de l'espace ordinaire; dans ces rapprochements un point de l'espace crémonien vient respectivement correspondre à un espace isotrope de S_4 , à un plan orienté de S_3 , et à une génératrice du complexe spécial. — Les développements du Mémoire sont très détaillés et quelquefois même prolixes; ils auraient pu être un peu simplifiés, en substituant à E_0, E_1, E_2 les nouvelles unités

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{2}(E_0 + E_1), \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{2}(E_0 - E_1), \quad \varepsilon_2 = E_2,$$

admettant le tableau de multiplication suivant:

	ε_0	ε_1	ε_2
ε_0	ε_0	0	ε_2
ε_1	0	ε_1	0
ε_2	0	ε_2	0

[Pour la caractérisation de l'algèbre — isomorphe à celle des ternions — qu'on obtient ainsi, cfr. le type XXVII de la classification donnée par G. Scorza dans *Le algebre del 3° ordine*, Atti Accad. Sci. Napoli, II. s. 20 (1935); ce Zbl. 12, 392.]

Beniamino Segre (Bologna).

Chambers, L. H.: On (2, 2) planar correspondences. Bull. Amer. Math. Soc. 42, 382—388 (1936).

Wenn in zwei Ebenen π, π'' zwei Involutionen I, J gegeben sind und ihre Paare entsprechender Punkte rational auf die Punkte einer dritten Ebene abgebildet werden, so erhält man zwischen π, π'' eine (2, 2)-Transformation. Diskussion und Beschreibung von 10 Fällen solcher Transformationen, die man erhält, wenn I und J der Reihe nach die vier wohlbekannten typischen ebenen Involutionen sind: die harmonische Homologie und die Involutionen von Geiser, De Jonquières und Bertini. Diese letzte wird immer zunächst auf einem Doppelkegel 2. Ordnung abgebildet, der dann auf eine Ebene stereographisch projiziert wird.

E. G. Togliatti (Genova).

Blanch, Gertrude K.: Properties of the Veneroni transformation in S_4 . Amer. J. Math. 58, 639—645 (1936).

Die Hyperflächen r -ter Ordnung eines Raumes S_r , die durch $r + 1$ in allgemeiner

Lage gegebene Räume S_{r-2} hindurchgehen, bilden ein homaloides System und definieren eine Cremonasche Verwandtschaft zwischen S_r und S'_r ; das homaloide System im S'_r ist ebenso beschaffen [E. Veneroni, Rend. Ist. Lomb. (2) 34, 640 (1901)]. Hier werden die vier bilinearen Gleichungen der Transformation für $r = 4$ ausgerechnet und die Möglichkeit involutorischer Typen im Falle $S_4 \equiv S'_4$ diskutiert. Die Rechnungen sind teilweise nur kurz angedeutet.

E. G. Togliatti (Genova).

Huff, Gerald B.: Discontinuous groups associated with the Cremona groups. Amer. J. Math. 58, 627—636 (1936).

Eine Untersuchung über die Gruppe $g_{\varrho,2}$ linearer Transformationen mit ganzzahligen Koeffizienten, die von der Involution $x'_i = x_i + M$ ($i = 0, 1, 2, 3$), $x'_{j+3} = x_{j+3}$ ($j = 1, 2, \dots, \varrho - 3$), wobei $M = x_0 - x_1 - x_2 - x_3$, und von allen Permutationen der $x_1 x_2 \dots x_\varrho$ erzeugt wird. Diese Gruppe kommt in der Bestimmung der Linearsysteme ebener Kurven mit gegebener Dimension und Geschlecht vor; sie besitzt die zwei Invarianten $L \equiv x_1 + \dots + x_\varrho - 3x_0$, $Q \equiv x_1^2 + \dots + x_\varrho^2 - x_0^2$. Hier werden überall die Zahlen $x_0 x_1 \dots x_\varrho \bmod 3$ reduziert; man erhält so eine entsprechende Gruppe $g_{\varrho,2}^{(3)}$. Die reduzierten Werte von $x_0 x_1 \dots x_\varrho$ bilden eine Charakteristik $x = \{x_0; x_1 \dots x_\varrho\}$; sie ist vom Typus $(i_0; l m n)$, wo $l + m + n = \varrho$, wenn $x_0 = i_0$, und wenn unter den Zahlen $x_1 x_2 \dots x_\varrho$ l -mal 2, m -mal 1 und n -mal 0 vorkommt; sie ist von der Art $(a_1 a_2)$, wenn $x_1 + \dots + x_\varrho - 3x_0 \equiv a_1$, $x_1^2 + \dots + x_\varrho^2 - x_0^2 \equiv a_2$, wo $a_1, a_2 = 0, 1, 2$; es gibt 9 Arten von Charakteristiken. Die Bestimmung und Aufzählung aller Charakteristiken einer gegebenen Art und die Bestimmung aller Charakteristiken, die mit einer gegebenen in bezug auf $g_{\varrho,2}^{(3)}$ konjugiert sind, führen zu einer tieferen Untersuchung dieser Gruppe. Für $\varrho \leq 8$ sind $g_{\varrho,2}$ und $g_{\varrho,2}^{(3)}$ endlich und einfach isomorph; für $\varrho = 9$ ist $g_{\varrho,2}$ unendlich; ihre Eigenschaften sind bekannt und geben diejenigen von $g_{\varrho,2}^{(3)}$. Für $\varrho > 9$ ist $g_{\varrho,2}$ unendlich; die Charakteristiken der Typen $(0; \varrho 0 0)$, $(0; 0 \varrho 0)$, $(0; 0 0 \varrho)$ sind selbstkonjugiert in bezug auf $g_{\varrho,2}^{(3)}$, während die übrigen Charakteristiken 9 konjugierte Systeme bilden, die den 9 möglichen Wertepaaren von a_1, a_2 entsprechen; und die Gruppe $g_{\varrho,2}^{(3)}$ ist diejenige Untergruppe der Gruppe G_ϱ aller linearen Substitutionen mit Koeffizienten im Galoisschen Felde [3] und mit L, Q als Invarianten, deren Substitutionen in den Charakteristiken $(0, 1)$ gerade Permutationen induzieren. Daraus kann man schließen, daß nur für $\varrho = 9$ die Reduktion der Koeffizienten mod 3 die Natur einer C -Charakteristik bestimmen kann (s. A. B. Coble, dies. Zbl. 10, 128).

E. G. Togliatti (Genova).

Differentialgeometrie:

Goormaghtigh, R.: Sur le lieu des centres de courbure d'une courbe gauche. Mathesis 50, 185—188 (1936).

Fon, Te-Chih: A note on some special curves in space. Tôhoku Math. J. 42, 80 bis 85 (1936).

Die vom Verf. früher (vgl. dies. Zbl. 13, 319) eingeführte, jedem Punkt einer Raumkurve zugeordnete Binormalen-Regelfläche 2. Ordnung und die entsprechend mit Hilfe der Hauptnormalen definierte werden zu weiteren Charakterisierungen spezieller Kurvenklassen herangezogen. Z. B.: Schneidet die Schmieg Ebene die zugehörige Binormalen-Regelfläche 2. Ordnung stets in einem Kreis, so hat die Kurve konstante Windung und umgekehrt. Geht die rektifizierende Ebene stets durch den Mittelpunkt der zugehörigen Hauptnormalen-Regelfläche 2. Ordnung, so hat die Kurve konstante Windung und umgekehrt.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Niculescu, Alexandru V.: Une classe de courbes gauches. Bull. Sci. École polytechn. Timişoara 6, 184—186 (1936).

Verf. betrachtet (eine von Tzitzeïca studierte Klasse sphärischer Kurven verallgemeinernd) die Raumkurven, für welche $\cotg \lambda$ proportional der Bogenlänge ist, wo λ den Winkel zwischen der Schmieg Ebene und dem zum Kurvenpunkt führenden Radius der Schmiegkugel ist. Insbesondere diskutiert er die Kurven konstanter Krüm-

mung oder Windung, die Enneperschen und Bertrandschen Kurven, die zu dieser Klasse gehören. *W. Fenchel* (Kopenhagen).

Wald, A.: Begründung einer koordinatenlosen Differentialgeometrie der Flächen. Erg. math. Kolloqu. H. 7, 24—46 (1936).

Durchführung des Beweises für den in C. R. Acad. Sci., Paris 201 (1935) und dies. Zbl. 12, 371 angekündigten Satz; zu der notwendigen und hinreichenden Bedingung im letztgenannten Referat ist hinzuzufügen, daß der Raum im Mengerschen Sinne konvex ist (zu je zwei Punkten existiert mindestens ein Punkt „zwischen“ ihnen). *W. Feller* (Stockholm).

Haimovici, Mendel: Géométrie intégrale sur les surfaces courbes. C. R. Acad. Sci., Paris 203, 230—232 (1936).

Für die geodätischen Linien einer Fläche wird eine Dichte definiert, und zwar ebenso wie dies kürzlich auch Blaschke (vgl. dies. Zbl. 14, 119) für die Extremalen beliebiger Variationsprobleme getan hat. Verf. überträgt ferner die Croftonsche Formel, die das Produkt der Dichten zweier Punkte in der Ebene durch die Dichte der Verbindungsgeraden und die Dichten der Punkte auf der Geraden ausdrückt, auf beliebige Flächen. Sind \dot{S}' und \dot{S}'' die Dichten der beiden Punkte auf der Fläche, \dot{G} die Dichte der Verbindungsgeodätischen G und s die Bogenlänge auf G , so gilt

$$\dot{S}' \dot{S}'' = [y_1(s') y_2(s'') - y_1(s'') y_2(s')] \dot{G} ds' ds''.$$

Hierbei sind y_1 und y_2 zwei Lösungen der zu G gehörigen Jacobischen Differentialgleichung mit $y_1 \frac{dy_2}{ds} - y_2 \frac{dy_1}{ds} = 1$. *W. Fenchel* (Kopenhagen).

Terracini, Alessandro: Invariante di Mehmke-Segre generalizzata e applicazione alle congruenze di rette. Boll. Un. Mat. Ital. 15, 109—113 (1936).

P. Buzano [Boll. Un. Mat. Ital. 14, 93 (1935); ce Zbl. 11, 224] et E. Bompiani [Boll. Un. Mat. Ital. 14, 237 (1935); ce Zbl. 12, 276] ont considéré un invariant projectif, relatif à une droite générique d'une congruence de droites; ici l'A. assigne pour cet invariant une interprétation géométrique invariante assez simple, dans l'ordre d'idées de celle donnée tout récemment par lui-même pour l'invariant de Mehmke-Segre [cfr. A. Terracini, Atti Accad. Sci. Torino 71, 310 (1936); ce Zbl. 14, 177]. La déduction repose sur la remarque suivante: deux coniques ayant un contact du 3^e ordre dans un point P admettent la même courbure non seulement au point P , mais dans tous les points de la droite qui les touche en P (pour la notion qu'intervient ici, v. le travail de l'A. tantôt cité). *Beniamino Segre* (Bologna).

Finikoff, S.: Surfaces ayant aux points homologues les mêmes directrices de Wilczynski. Bull. Soc. phys.-math. Kazan, III. s. 7, 44—54 (1936).

Dans ce travail [résumé dans C. R. Acad. Sci., Paris 197, 883 (1933); ce Zbl. 7, 424] l'A. détermine les couples de surfaces jouissant de la propriété indiquée dans le titre. Il obtient seulement deux classes de surfaces: les surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que deux points caractéristiques (déjà profondément étudiées par Demoulin et Godeaux, cfr. p. ex. L. Godeaux, La théorie des surfaces et l'espace réglé, § 10. Paris: Hermann 1934; ce Zbl. 9, 227), et certaines surfaces isotherme-asymptotiques dont les lignes asymptotiques appartiennent à des complexes linéaires. *Segre*.

Bol, G.: Topologische Fragen der Differentialgeometrie. LXIV. Über ein bemerkenswertes Fünfgewebe in der Ebene. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 11, 387—393 (1936).

W. Blaschke hat (T_{50} , Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 9, dies. Zbl. 7, 78) die Behauptung aufgestellt: Wenn bei geeigneten Regularitätsforderungen fünf Kurvenscharen in der x, y -Ebene, nämlich $t_i(x, y) = \text{konst.}$ die Höchstzahl, nämlich 6 linear unabhängige Identitäten von der Gestalt

$$\sum_{i=1}^5 f_i^{(k)}(t_i) = 0 \quad (1)$$

erfüllen, so ist das Kurvengewebe gleichwertig zu einem aus den geradlinigen Tangenten einer algebraischen Kurve 5. Klasse. — Bol erweist diesen Satz durch Aufzeigung eines Gegenbeispiels als falsch, während andere verwandte Sätze dieser Art, die von Bol und Blaschke stammen, ihre Gültigkeit behalten. — Bols Gegenbeispiel ist folgendes:

$$\frac{dt_1}{t_1} + \frac{dt_2}{t_2} + \frac{dt_4}{1-t_4} = 0 \text{ und zyklisch } (1, 2, 3, 4, 5),$$

$$\sum_{i=1}^5 dt_i \left(\frac{\log 1 - t_i}{t_i} + \frac{\log t_i}{1 - t_i} \right) = 0.$$

Dies Beispiel hängt mit der bekannten Figur von 5 windschiefen Geraden im R_4 zusammen mit der Eigenschaft, daß jede Ebene, die irgend 4 von ihnen trifft, auch notwendig die fünfte schneidet. Für diese Quintupel gibt Bol eine einfache Konstruktion. Die Frage nach allen Lösungen von (1) bleibt offen. W. Blaschke (Hamburg).

Topologie :

Smith, P. A.: *Topological foundations in the theory of continuous transformation groups*. Duke math. J. 2, 246—279 (1936).

In der klassischen Theorie der kontinuierlichen Gruppen werden häufig Behauptungen aufgestellt, die sich nur auf genügend kleine Umgebungen einer Stelle beziehen. Verf. stellt sich die Aufgabe, alle Voraussetzungen über diese Umgebungen möglichst scharf zu fassen, zu untersuchen, inwieweit die Verhältnisse im Kleinen die im Großen bestimmen und dabei sowohl abstrakte topologische Gruppen als insbesondere Transformationsgruppen zu berücksichtigen. — Grundlegend ist der Begriff einer Gruppenstruktur, d. i. eines topologischen Raumes \mathfrak{G} , in welchem gewisse Produkte ab definiert sind, wieder zu \mathfrak{G} gehören und dem Assoziativgesetz $(ab)c = a(bc)$ genügen, sobald beide Seiten definiert sind, sowie der Begriff des Systems (A_1, A_2, \dots, A_n) vom Grade n , in welchem A_1, \dots, A_n offene Mengen in \mathfrak{G} sind und alle Produkte $a_h a_{h+1} \dots a_{h+k}$ für $h+k \leq n$ definiert sind. \mathfrak{G} heißt eine Halbgruppe, wenn in \mathfrak{G} die Multiplikation stetig und die Division eindeutig ist und wenn es in \mathfrak{G} ein System (A, B) gibt. \mathfrak{G} heißt eine Teilgruppe (partial group), wenn es ein System (H, H) und ein Einzelelement e in H sowie ein Inverses zu jedem Element von H gibt, während ab und a^{-1} in \mathfrak{G} , soweit vorhanden, stetig sind. Es gibt dann Systeme (A, A, \dots, A) von beliebig hohem Grad mit eindeutiger Division. Ist $H = \mathfrak{G}$, so heißt \mathfrak{G} eine Gruppe. — Ist eine Umgebung von e eine n -Zelle, so sind die Forderungen der Existenz und der Stetigkeit von a^{-1} Folgen der übrigen Postulate für Teilgruppen. — Um die Darstellungen von Gruppenstrukturen durch Transformationen eines Raumes \mathfrak{X} zu untersuchen, werden „Darstellungsstrukturen $(\mathfrak{G}, \mathfrak{X})$ betrachtet, in denen Produkte $a \cdot x$, soweit definiert, zu \mathfrak{X} gehören und stetig sind und in denen $a \cdot (b \cdot x) = ab \cdot x$ gilt, soweit $a \cdot (b \cdot x)$ und ab definiert sind, während aus $a \cdot x = a \cdot y$ folgt $x = y$. In $(\mathfrak{G}, \mathfrak{X})$ werden wieder „Systeme“ $(A_1, \dots, A_n; X)$ vom Grade n betrachtet, wobei der Fall $X = \mathfrak{X}$ eine besondere Rolle spielt. — Die klassische Liesche Theorie handelt von Strukturen \mathfrak{G}^r und $(\mathfrak{G}^r, \mathfrak{X}^n)$, bei denen \mathfrak{G}^r eine r -Zelle und \mathfrak{X}^n eine n -Zelle ist und in denen Systeme $(A, B; X)$ oder (A, B, C) existieren, derart, daß die Koordinaten von ab oder von $a \cdot x$ Funktionen von der Klasse $C^{(1)}$, $C^{(2)}$ oder $C^{(3)}$, d. h. ein- bis dreimal stetig differenzierbare Funktionen der Koordinaten von a und b bzw. x sind. — Wichtig ist ein Satz, der es gestattet, zu entscheiden, ob eine Familie von Transformationen mit „Gruppeneigenschaft“ eine Halbgruppe darstellt. — Ein System $(G, G, \dots, G; X)$ mit $G^{-1} = G$ heißt lokal transitiv in x_0 , wenn $G \cdot x_0$ eine offene Menge ist. Ist \mathfrak{G} eine Gruppe, \mathfrak{X} zusammenhängend und $(\mathfrak{G}, \mathfrak{X})$ ein System, so folgt aus der lokalen Transitivität die im Großen: $\mathfrak{G} \cdot x_0 = \mathfrak{X}$ für x_0 in \mathfrak{X} . Ist $(G, G, G, G; X)$ ein System mit $G^{-1} = G$ und e in G und ist g die Menge der Elemente g von GG mit $g \cdot x_0 = x_0$, so ist g eine Teiluntergruppe von GG (d. h. die Produkte und Inversen der Elemente von g , so-

weit sie in GG liegen, gehören zu g), und man kann G in gegenseitig fremde Nebenklassen $ag \cap G$ einteilen, welche als Punkte eines Zerlegungsraumes aufgefaßt werden können. Ist $(G, G, G, G; X)$ in x_0 lokal transitiv, so ist der Zerlegungsraum vermöge $ag \cdot x_0 = x$ topologisch auf die offene Menge Gx_0 abgebildet. Ist z. B. \mathfrak{G} Liesch, so ist der Zerlegungsraum und daher auch der Bildraum \mathfrak{X} im Punkte x_0 euklidisch. Umgekehrt kann man zu jeder abgeschlossenen Teiluntergruppe g einen Zerlegungsraum \mathfrak{H} und eine Darstellungsstruktur $(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$ konstruieren. Die Beziehung zwischen Teiluntergruppen und Untergruppen einer Gruppe \mathfrak{G} wird untersucht. — Bewiesen werden ein Einbettungssatz für abstrakte euklidische Halbgruppen von der Klasse $C^{(2)}$ und ein Einbettungssatz für Transformationsgruppen. Letzterer heißt: Ist \mathfrak{G} eine Halbgruppe und $(\mathfrak{G}, \mathfrak{X})$ eine Struktur, die ein System (G, \mathfrak{X}) enthält, so daß für a, b aus G aus „ $ax = bx$ für alle x aus \mathfrak{X} “ folgt $a = b$, so läßt sich (G, \mathfrak{X}) zu einem System $(\mathfrak{G}^*, \mathfrak{X})$ erweitern, in welchem \mathfrak{G}^* eine Gruppe ist. — Ist \mathfrak{G} eine Liesche Gruppe und $(\mathfrak{G}, \mathfrak{X})$ eine transitive Darstellungsstruktur, in welcher alle Produkte $a \cdot x$ definiert sind, so ist die Wegegruppe von \mathfrak{X} isomorph der Faktorgruppe der Wegegruppe von \mathfrak{G} nach der Untergruppe der in g verlaufenden Wege. Dabei ist g wieder durch $g \cdot x_0 = x_0$ definiert.

van der Waerden (Leipzig).

Whyburn, G. T.: Concerning rationality bases for curves. *Erg. math. Kolloqu.* H. 7, 58—60 (1936).

Ein Kontinuum K heißt eine reguläre (rationale) Kurve, wenn jeder Punkt von K in beliebig kleinen Umgebungen U liegt, deren Begrenzungen $B(U)$ mit K nur endlich (bzw. endlich oder abzählbar unendlich) viele Punkte gemein haben. Existieren beliebig kleine U mit dieser Eigenschaft, für welche $K \cdot B(U)$ in einer festen Menge $B \subset K$ enthalten sind, so heißt die Menge B eine Regularitäts- (Rationalitäts-) Basis. Eine reguläre Kurve K heißt beständig regulär, wenn für jede reguläre Kurve K' auch $K + K'$ regulär ist. Knaster hat gezeigt, daß in einer beständig regulären Kurve jede Rationalitätsbasis auch eine Regularitätsbasis ist [*Mh. Math. Phys.* 42, 37—44 (1935); dies. Zbl. 11, 371]. Verf. zeigt, daß dies letztere in einer rationalen Kurve H dann und nur dann gilt, wenn H eine reguläre Kurve und jedes echte zyklische Element von H beständig regulär ist. Unter den rationalen Kurven ohne Zerschneidungspunkte (cutpoints) charakterisiert also die Knastersche Eigenschaft gerade die beständig regulären Kurven. Es ergibt sich weiter noch, daß 1. für die Continua die Knastersche Eigenschaft zyklisch extensiv ist und daß 2. jeder Baum die Knastersche Eigenschaft hat.

Nöbeling (Erlangen).

Lichtenbaum, Lucien: Sur un théorème de M. P. Urysohn. *Tôhoku Math. J.* 42, 75—79 (1936).

Neuer Beweis des zuerst von Urysohn (*Fundam. Math.* 8, 287) bewiesenen Satzes: Ist M ein n -dimensionaler, kompakter, metrischer Raum, so existiert eine Zahl $\varepsilon > 0$ derart, daß bei jeder Darstellung von M als Summe endlich vieler abgeschlossener Teilmengen mit Durchmessern $< \varepsilon$ mindestens ein $(n+1)$ -Tupel dieser Mengen einen nichtleeren Durchschnitt hat.

Nöbeling (Erlangen).

Mechanik.

● **Granier, J.:** Les systèmes oscillants. Préface de P. Janet. Paris: Dunod 1936. VIII, 215 pag. et 114 fig. Frs. 45.—.

Das Buch von J. Granier ist den grundlegenden Fragen der Schwingungstheorie gewidmet. Es werden in gleicher Weise mechanische, elektrische und elektromechanische Systeme besprochen. Hauptsächlich wird die physikalische Seite ins Auge genommen. Der mathematische Teil ist gemeinsam und nur linearen Systemen gewidmet; hier werden kurz die analytischen und graphischen Methoden besprochen. Im ersten Teil werden Systeme mit einem Freiheitsgrad besprochen; es werden freie und erzwungene Schwingungen in linearen Systemen diskutiert; es werden verschiedene Fälle der gewöhnlichen Resonanz untersucht; auch die Ferroresonanz wird betrachtet; die Frage der Autenschwingungen wird kurz skizziert, und zwar nur für den Fall der Abwesenheit äußerer Einwirkung. Es werden viele physikalische

Beispiele diskutiert. Im zweiten Teil werden Systeme mit vielen Freiheitsgraden besprochen; es werden freie und erzwungene Schwingungen linearer Systeme untersucht; auch hier wird auf die Autenschwingungsphänomene aufmerksam gemacht. Zum Schluß wird die Filtertheorie in elementarer Darstellung gegeben. Der dritte Teil ist verteilten Systemen gewidmet.

A. Andronoff, A. Witt (Moskau).

Demidovič, B.: Sur l'existence d'un invariant intégral dans l'ensemble des points périodiques. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 2, 11—13 (1936).

Let M be a measurable set of Euclidean n -space and $T_t, T_t T_s = T_{t+s}$, a flow of M into itself. It is assumed that T_t is of Class C' with respect to t and that $\varrho(x_t, y_t) \leq N_t \varrho(x_0, y_0)$, where ϱ is distance and N_t is a function of t only. With the aid of results of Birkhoff and Smith [J. de Math. 7, 345—379 (1928)] and E. Hopf (this Zbl. 4, 260) the author proves that an invariant n -dimensional integral exists on the periodic points of M , the integrand being finite and positive on sets of positive measure.

Hedlund (Bryn Mawr).

● **Milankowitha, M.: Himmelsmechanik.** Beograd 1935. 333 S. [Serbisch].

Das Buch ist, soweit der Ref. auf Grund der Formeln sehen kann, eine elementare Einführung in die Himmelsmechanik und behandelt das Zweikörperproblem, die homothetischen Lösungen des Dreikörperproblems (unter vorheriger Beschränkung auf ebene Lösungen), die Methode der Variation der Konstanten nebst Anwendung auf das Sonnensystem, die elementare Theorie der Säkularstörungen, endlich Präzession und Nutation.

Wintner (Baltimore).

Brendel, M.: Über die Lagrangeschen strengen Lösungen des Dreikörperproblems. Mh. Math. Phys. 43, 298—304 (1936).

Die homothetischen Lösungen des Dreikörperproblems [Euler, Lagrange; vgl. Ch. H. Müntz, Math. Z. 15 (1923) und C. Carathéodory, dies. Zbl. 8, 134] werden unter Benutzung gewisser vom Verf. (Abh. Ges. Wiss. Göttingen 1898) in der Theorie der Planetenstörungen verwendeten Koordinaten von neuem hergeleitet.

Wintner.

Perron, Oskar: Neuer Existenzbeweis für periodische Bahnen im eingeschränkten Dreikörperproblem. Mh. Math. Phys. 43, 81—96 (1936).

Der Verf. gibt elegante Beweise für die Existenz von einigen der mathematisch bereits sichergestellten periodischen Lösungsscharen des restringierten Dreikörperproblems. Behandelt werden einerseits die Librationen in der Nachbarschaft der Lagrangeschen Gleichgewichtslagen und andererseits die kleinen kreisähnlichen Bahnen um eine der beiden Massen, letztere Lösungen auf Grund eines Birkhoffschen Kunstgriffs [zu den Literaturangaben der Fußnoten 4 und 10 vgl. Sächs. S.-B. 82, 42 (1930)].

Wintner (Baltimore).

Sokoloff, George: Sur les trajectoires singulières dans le problème des trois corps qui s'attirent mutuellement proportionnellement à leurs masses et à une fonction de la distance. (II. comm.) Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 22, 540—551 (1936).

In einer seiner früheren Arbeiten untersuchte Verf. zweifache Zusammenstöße im Dreikörperproblem im Falle, wenn die Anziehungskräfte nicht newtonianisch sind, sondern gewissen Beziehungen genügen (vgl. dies. Zbl. 14, 85). In der vorliegenden Mitteilung wird unter denselben Annahmen ein direkter Beweis der Existenz von Bahnkurven mit Zusammenstößen gegeben, und es werden gewisse invariante Relationen, welche für Zusammenstöße charakteristisch sind, festgestellt.

A. Andronoff, A. Witt (Moskau).

Hüttenhain, E.: Stabile Librationslösungen und Null-Geschwindigkeitsflächen. Astron. Nachr. 259, 149—158 (1936).

Ein infinitesimaler Probekörper P sei der Anziehung dreier Massen m_i ausgesetzt, die sich um den Schwerpunkt des Systems in Lagrangeschen Kreisen bewegen. Der Verf. beschäftigt sich mit der Stabilität der infinitesimalen Librationen von P um die Lagen des relativen Gleichgewichts in dem Fall $m_1 = 1, m_2 = \mu, m_3 = \mu$ und findet Verhältnisse, die geläufigen Tatsachen über die Lagrangeschen Punkte des restringierten Dreikörperproblems entsprechen.

Wintner (Baltimore).

Horrocks, H.: The relation between the period and the eccentricity in the orbits of the binary stars. *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **96**, 534—544 (1936).

Die Arbeit bezweckt, die empirische Korrelation zwischen den Exzentrizitäten und Perioden bei Doppelsternen durch die Endlichkeit der Geschwindigkeit der Gravitationsausbreitung zu erklären. Zu diesem Zweck werden die durch den Ansatz bedingten säkularen Störungen in Betracht gezogen. Der Verf. findet, daß die numerischen Konsequenzen des Ansatzes mit der beobachteten statistischen Relation im Einklang sind. *Wintner (Baltimore).*

Dupont, Y.: Théorie des déformations élastiques dans l'espace-temps. *Bull. Acad. Roy. Belg., V. s.* **22**, 615—623 (1936).

Astronomie und Astrophysik.

● **Rosseland, S.:** Theoretical astrophysics. Atomic theory and the analysis of stellar atmospheres and envelopes. (Internat. ser. of monogr. on phys. Edited by R. H. Fowler a. P. Kapitza.) Oxford: Clarendon press 1936. XIX, 355 pag. a. 47 fig. bound 25/-.

The first seven chapters give a concise logically developed account of the wave mechanics of the atom, approached from classical dynamics via statistical mechanics, and carried as far as the theory of multiplets. This is followed by a chapter on the quantum theory of radiation. The next ten chapters deal with the theory of stellar atmospheres under the headings: transfer of radiation in a star — profiles of absorption lines — the total intensity of absorption lines — thermal excitation of stellar atmospheres — the opacity — rotating stars — the effect of magnetic and electric fields on absorption lines — molecular combinations in stars — application of the theory of molecules to the determination of effective temperature — dissociative equilibrium of stellar compounds. The remaining five chapters deal with material lying outside the normal stellar atmospheres, under the headings: the solar envelope — stars with extensive envelopes — forbidden transitions — theory of radiative transformations in nebulae — absorption by interstellar gases. The book employs very general physical ideas and mathematical methods, and in the applications pays more attention to stressing main principles and exposing assumptions involved, rather than displaying very detailed results. This is in keeping with the author's aim "to formulate a programme of theoretical astrophysics", so that the book should prove of great value to those starting research work on the subject. It does not contain much that is essentially new, but special features of the treatment are the full accounts of cyclical transitions between several atomic states, and of molecular spectra in astrophysical applications. *W. H. McCrea (London).*

Unsöld, A.: Stoßdämpfung in der Sonnenatmosphäre. *Z. Astrophys.* **12**, 56—63 (1936).

The equivalent widths of the $3^1P^0 - n^1D$ series of magnesium in the solar spectrum have been measured by Minnaert and Genard [*Z. Astrophys.* **10**, 377 (1935)]. These authors found it impossible to explain the results by the perturbing fields of other ions and electrons in the solar atmosphere. The present author however finds an explanation in collisions with these particles producing collision-damping, which widens the lines by disturbing the phase of the radiation emitted by the atoms in question (which in turn produces a widening of the absorption lines) according to a well-known theory. He evaluates the effective cross-section for the collisions on the basis of the quantum theory, and thence shows that for the magnesium lines under discussion the collision-damping constant is large compared with the radiation-damping constant, which determines the widths of most solar lines. Further he shows that the theoretical variation of the width with n is in excellent agreement with that observed. He then tries to see if similar effects are to be expected in the case of sodium, or other atoms sensitive to the Stark effect. His rough estimate predicts effects of the same order as those due to radiation-damping, but it is not sufficiently accurate to tell which effects predominate. He concludes with a few comments on the relation to central intensities. *W. H. McCrea (London).*

Krat, W.: Zur Theorie rotierender Gasmassen. *Z. Astrophys.* **12**, 192—202 (1936).

This paper contains formal approximate solutions of extended problems on a rotating mass of gas of the sort considered by Chandrasekhar (this Zbl. **7**, 39, 134).

They are classified into cases of barotropic rotation, in which a generalised potential exists, and baroclinic rotation, where such a potential does not exist. The relation to radiative equilibrium is discussed. *W. H. McCrea* (London).

Minnaert, M., und J. Houtgast: Flügelprofile von starken Fraunhoferschen Linien als Funktion des Abstandes vom Zentrum der Sonnenscheibe. *Z. Astrophys.* **12**, 81 bis 100 (1936).

The first part of the paper given the results of measurements of the contours of the solar lines $\text{Ca}^+ 3934$, $\text{Fe } 4046$, $\text{Ca } 4227$, $\text{Ca}^+ 8662$ at six different points of the sun's disc. The authors then proceed to a comparison of these results with the theoretical ones, and for that purpose the absorption, optical depth, black radiation and relative scattering at different depths in the solar atmosphere are calculated. For the wings of the lines the well-known theory of Unsöld is applied, and for the central parts the theory of Pannekoek is used. The agreement between theory and observation is qualitatively quite good; quantitatively, however, it is rather unsatisfactory. The reasons for this are discussed at the end of the paper. *Steenholt* (Bergen).

Majumdar, R. C., and D. S. Kothari: The analysis of two-phase stellar configurations. *Z. Astrophys.* **12**, 263—280 (1936).

This is a systematic and formal account, following previous work (Kothari, this *Zbl.* **12**, 132), of two phase stellar configurations consisting of an envelope obeying Emden's equation of index n_1 and a core obeying the equation of index n_2 . The "standard model" is employed. The physical characteristics of the configurations are listed, being given in terms of functions defined to satisfy Emden's equation with suitable boundary conditions. These functions are only descriptive, and cannot be given analytically. Special attention is given to Emden's "isothermal" core, corresponding to $n_2 \rightarrow \infty$. Future numerical applications are promised. *W. H. McCrea*.

Gerasimovič, B. P.: Note on radiation-pressure in an expanding envelope. *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **96**, 574—579 (1936).

Verf. untersucht in Ergänzung früherer Arbeiten die Wirkung der inneren relativen Bewegungen in Nebelhüllen auf den Strahlungsdruck. Diese Wirkung beruht auf dem der relativen Geschwindigkeit der emittierenden und absorbierenden Volumenelemente entsprechenden Unterschied in der Frequenz von Emissionslinie und Absorptionslinie. Durch ein Näherungsverfahren wird eine obere Grenze des betrachteten Effekts abgeleitet. Im Fall der Strahlung im Bereich der L_α -Linie in einem typischen Be-Stern ergibt sich eine Verminderung des Strahlungsdrucks von weniger als einem Prozent. Daß die Wirkung so klein ist, beruht darauf, daß infolge des hohen Absorptionskoeffizienten innerhalb der L_α -Linie nur solche Volumenelemente miteinander in Wechselwirkung stehen, die wenig voneinander entfernt sind und deshalb kleine relative Geschwindigkeiten haben. In den Nebelhüllen um Novae ist die Wirkung infolge der großen Ausdehnungsgeschwindigkeiten größer. *Benqt Strömgren*.

Chandrasekhar, S.: The pressure in the interior of a star. *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **96**, 644—647 (1936).

The theorem is proved: In any equilibrium configuration in which the mean density inside r decreases outwards

$$\frac{1}{2} G \left(\frac{4}{3} \pi \right)^{1/3} \bar{\rho}^{4/3}(r) M^{2/3}(r) \leq P_c - P \leq \frac{1}{2} G \left(\frac{4}{3} \pi \right)^{1/3} \rho_c^{4/3} M^{2/3}(r).$$

The notation is that of E. A. Milne's recent work on the same subject (this *Zbl.* **13**, 326), the suffix c denoting central values, and the object is to obtain inequalities complementary to Milne's, i.e. going in the opposite direction. For example whereas Milne's work gives a lower bound for the central pressure P_c , the present work gives also an upper bound. Corollaries are stated, and integral inequalities analogous to Milne's are worked out. *W. H. McCrea* (London).

McVittie, G. C.: Note on polytropic equilibrium in curved space. *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **96**, 683—689 (1936).

The author studies by the methods of general relativity the problem of a poly-

tropic configuration of matter (the "star") subject to external pressure, the importance of which has lately been pointed out in other connections by E. A. Milne (this Zbl. 13, 326). The external pressure is supposed due to an "Einstein universe" distribution of matter under the gravitational influence of the star, which may be treated as a mass-particle as far as this external distribution is concerned, so the corresponding metric is one previously given by the author (this Zbl. 7, 84). The metric corresponding to the internal distribution of matter in the star is obtained by using the usual form for spherical symmetry, with the usual condition for isotropic pressure, together with a condition requiring that the pressure and density shall be connected by the polytropic law (to a sufficient degree of approximation). The equations of fit at the interface express in terms of the metrics the requirements that the gravitational force and the pressure shall be continuous there. The final results are conditions which must be satisfied by a polytrope of index n in order that it may be in equilibrium when immersed in a cloud of matter of density ρ_e ; they are expressed in terms of Emden functions. Taking mass, radius, and surface density values corresponding to the sun, the author evaluates the ρ_e required to hold it in equilibrium, if it were a polytrope of index n , for values of n from 1 to 4, and discusses the significance of his results.

W. H. McCrea (London).

Anderson, Wilhelm: Existiert eine obere Grenze für die Dichte der Materie und der Energie? Acta et Comment. Univ. Tartu A 29, Nr 9, 1—142 (1936).

The author first quotes the views of a large number of writers upon the question of the existence of an upper limit to the possible density of matter. He criticises them, and states his belief that none of the writers has established the existence of such a limit. He then goes on to discuss the question from the standpoints of the special and general theories of relativity, and adduces reasons for his conclusion that for any particular heavenly body there is a maximum possible density which is inversely proportional to the square of the mass of the body. In connection with matter at high densities he then discusses Eddington's recent work on relativistic degeneracy. He then passes on to suggest that at the high densities in stellar interiors atomic nuclei would be broken down into neutrons, protons, and electrons, and he speculates on the significance of this, particularly of the presence of the neutrons. These, he considers, would in a relatively short time form a "neutron core" in the star, and he attempts to show that the gravitational contraction-energy of the neutrons would provide an adequate source of energy for the stellar radiation. The author then proposes a new stellar model on this basis, and sets up a corresponding mass-luminosity relation. To the first approximation the luminosity is proportional to the cube of the mass; while to the second approximation the effective temperature also appears in the relation, and it turns out that there are two values of the luminosity corresponding to a given mass and effective temperature. The author discusses the interpretation of these results and of their bearing upon the Russell-diagram, white dwarfs and their ages, the absence of stars of very large mass, and new stars.

W. H. McCrea (London).

Durand, Georges: Sur l'application de la relation masse-luminosité aux étoiles doubles visuelles. C. R. Acad. Sci., Paris 202, 1762—1764 (1936).

In a visual binary, for which the orbital elements are known, a classical relation gives an expression for the sum of the masses. This can be compared with the sum of the values of the separate masses deduced from Eddington's mass-luminosity law, the validity of which is thereby tested. The author carries out this comparison for 102 binaries for which trigonometric parallaxes are known, and 109 for which spectroscopic parallaxes are known. He finds excellent agreement, within the limits of observational uncertainties, and thus confirms the exactness of the mass-luminosity law which he had previously verified from data on 20 individual stars (this Zbl. 11, 422).

W. H. McCrea (London).

Bucerus, H.: Über den Potentialverlauf im Milchstraßensystem. Potentialbestimmung für ein Modell des Milchstraßensystems. *Astron. Nachr.* **259**, 365—384 (1936).

Als Modell des Milchstraßensystems wird eine Massenverteilung angesetzt, die zur galaktischen Ebene symmetrisch und in bezug auf eine dazu senkrechte z -Achse rotationssymmetrisch ist. Folgende Komponenten sollen das Gesamtsystem bilden: 1. Hauptsächlich in der galaktischen Ebene sei eine Massenanhäufung M konzentriert, deren Dichte ϱ nur von z [$\varrho(z) = \varrho_0 \cdot e^{-z^2/\beta^2}$], nicht aber vom Abstand vom Zentrum abhängt. Der Gesamtradius dieser Scheibe betrage 15000 pc. Die Sonne liegt in 10000 pc Abstand vom Zentrum. 2. Im Zentrum befinde sich eine rotationsellipsoidische Kernmasse \mathfrak{M} mit dem Achsenverhältnis 1:2 und der großen Achse 2500 pc. 3. Diffuse Materie μ von konstanter Dichte d erfülle die galaktische Ebene in 200 pc Dicke. — Das Gesamtpotential dieses Systems wird berechnet. Daraus lassen sich Ausdrücke für die Oortschen Konstanten der differentiellen Rotation ableiten. Führt man für letztere die empirischen Zahlenwerte ein, so findet man für die Gesamtmassen $\mathfrak{M} = 2,78 \cdot 10^{44} \text{ g}$ ($\approx 1,4 \cdot 10^{11} \odot$), $M + \mu = 2,0 \cdot 10^{44} \text{ g}$ ($\approx 1,0 \cdot 10^{11} \odot$). Schließlich untersucht Verf. die Bahnkurven im Milchstraßensystem und gelangt zu dem Schluß, daß die Sterne in der galaktischen Ebene Rosettenbahnen beschreiben, über die sich Pendelungen in der z -Richtung lagern.

Straßl (Göttingen).

Quantentheorie.

● **Stevens, Blamey: The identity theory.** 2. edit., revised a. amplified. Manchester: Sherratt & Hughes 1936. XVI, 247 pag. a. 29 fig. bound 7/6.

Verf. hat eine neue Wissenschaft, die „Identik“, eronnen, welche die Physik ersetzen soll. — Das Buch ist offenbar nicht ernst zu nehmen. *V. Fock* (Leningrad).

Datzeff, Assène: Sur une transformation qui conserve la forme des équations canoniques. *C. R. Acad. Sci., Paris* **203**, 300—302 (1936).

A result in quantum-mechanics is found which is analogous to a transformation due to Levi-Civita, which conserves the canonical form of equations in classical dynamics.

Whittaker (Edinburgh).

Tonolo, Angelo: Integrazione con quadrature delle equazioni di Dirac. *Rev. mat. hisp.-amer.*, II. s. **11**, 15—25 (1936).

Vgl. dies. *Zbl.* **14**, 183.

Welker, H.: Zur Behandlung von Bedingungsgleichungen in der Wellenmechanik. *Z. Physik* **101**, 95—103 (1936).

Durch Einführung von „Sperrpotentialen“ werden mittels eines Grenzüberganges Bedingungen abgeleitet für die Möglichkeit einer Eliminierung überzähliger Freiheitsgrade in der Quantenmechanik.

O. Klein (Stockholm).

Euler, Hans: Über die Streuung von Licht an Licht nach der Diracschen Theorie. *Ann. Physik*, V. F. **26**, 398—448 (1936).

Es wird gezeigt, daß die aus der Diracschen Löchertheorie folgende Streuung von Licht an Licht formal vollständig dargestellt werden kann durch eine Abänderung der Maxwellischen Gleichungen, indem zu der gewöhnlichen Lagrangefunktion gewisse Zusatzglieder vom vierten Grad in den Feldstärken hinzugefügt werden. Es wird die Beziehung dieser Beschreibung zur Bornschen Elektrodynamik diskutiert.

O. Klein (Stockholm).

Gamow, G., and E. Teller: Selection rules for the β -disintegration. *Physic. Rev.*, II. s. **49**, 895—899 (1936).

Es werden die Auswahlregeln für die Änderung des Kernspins i bei β -Zerfall untersucht. Die Fermische Wechselwirkungsenergie, die für die starken β -Strahler die Regel $\Delta i = 0$ verlangt, wird durch explizite Einführung von Spinvariablen der schweren Teilchen erweitert. Es wird gezeigt, daß diese Erweiterung auch notwendig ist, um Austauschkräfte der Majoranaschen Art (Austausch des Orts und nicht des

Spins) zwischen Protonen und Neutronen zu erhalten. Die Auswahlregeln für die starken β -Strahler (erste Sargentsche Kurve) werden dann $\Delta i = 0$ oder ± 1 (aber nicht $0 \rightarrow 0$). Es zeigt sich, daß auf diese Weise einige Widersprüche wegfallen, die bei der Analyse der Kernspins in der Thoriumzerfallsreihe mit Hilfe der Fermischen Auswahlregel entstanden.

V. Weisskopf (Kopenhagen).

Amaldi, E., ed E. Fermi: Sulle proprietà di diffusione dei neutroni lenti. Ric. Sci. progr. tecn. econom. naz. **1**, 393—395 (1936).

Kurze Angaben über neue Messungen an Neutronen thermischer Geschwindigkeit; Wirkungsquerschnitt für elastischen Stoß mit H-Kernen: $48 \cdot 10^{-24}$ cm²; Wirkungsquerschnitt für Einfangung: $0,32 \cdot 10^{-24}$ cm²; mittlere Lebensdauer: $1,6 \cdot 10^{-4}$ sec.

Bechert (Gießen).

Goldstein, L.: Sur la théorie des phénomènes de diffusion atomique. J. Physique Radium, VII. s. **7**, 255—262 (1936).

Die kürzlich von Rozentall [Z. Physik **98**, 742 (1936); dies. Zbl. **13**, 87] gegebene angenäherte analytische Darstellung des Fermischen Potentials wird verwendet zur Berechnung der Phasen bei der elastischen Streuung von Elektronen an Atomen, und zwar nach dem Wentzel-Kramers-Brillouin-Verfahren und nach dem Bornschen Verfahren. Mit dem letzteren Verfahren wird auch die Winkelfunktion der elastischen Streuung, der Wirkungsquerschnitt und der Atomformfaktor berechnet.

Bechert.

Burkhardt, Gerd: Über die Form der Comptonlinie. Ann. Physik, V. F. **26**, 567—584 (1936).

Es wird das Spektrum der Comptonschen Streustrahlung an einem Atom berechnet nach einem (von du Mond herrührenden) Verfahren, bei dem die Elektronen im Atom aufgefaßt werden als eine Gesamtheit freier bewegter Elektronen. Das Geschwindigkeitsspektrum dieser Elektronen wird berechnet aus Wellenfunktionen a) nach Thomas-Fermi, b) nach Schrödinger-Slater (wasserstoffähnliche Funktionen), c) nach Hartree. In Fall b) und c) ergibt sich eine befriedigende Übereinstimmung mit dem Experiment, während im Fall a) beträchtliche Abweichungen auftreten. Im zweiten Teil der Arbeit wird der Einfluß der Bindung und der Relativität genauer untersucht.

Casimir (Leiden).

Peierls, R.: Interpretation of Shankland's experiment. Nature **137**, 904 (1936).

Diskussion des scheinbaren Versagens der Erhaltungssätze beim Comptoneffekt [R. Shankland, Physic. Rev. **49**, 8 (1936)]. Nach neueren Versuchen (z. B. Bothe und Maier-Leibnitz, Ber. Heidelberger Akad. **1936**) scheinen sich die Shankland'schen Versuche jedoch nicht zu bestätigen.

C. F. v. Weizsäcker (Leipzig).

Peierls, R.: Magnetic transition curves of superconductors. Proc. Roy. Soc. London A **155**, 613—628 (1936).

Während bei einem „unendlich langen“ Supraleiter in einem longitudinalen Magnetfeld die Zerstörung der Supraleitung durch das Feld bei einer scharf definierten Feldstärke H_k erfolgt, gibt es in allen anderen Fällen ein Übergangsgebiet, in welchem die Zahl der durch den Körper hindurchgehenden Kraftlinien von 0 verschieden ist. — Verf. entwickelt eine phänomenologische Theorie für diese Übergangszustände. Er nimmt an, daß ein B und ein H definiert werden können, die den gewöhnlichen Maxwellgleichungen genügen, aber zwischen denen eine vorläufig willkürliche Beziehung besteht. Die einfachste Spezialisierung, die mit allen bis jetzt bekannten Versuchen im Einklang zu sein scheint, ergibt sich, wenn man annimmt: für jedes B (> 0 und $< H_k$) gilt $H = H_k$.

Casimir (Leiden).

Geophysik, Meteorologie, Geodäsie.

Sezawa, Katsutada: On the relation between seismic origins and radiated waves. Bull. Earthquake Res. Inst. Tokyo **14**, 149—154 (1936).

Weiterführung der in dieser Zeitschrift (dies. Zbl. **14**, 143) besprochenen Über-

legung, aus der Ausbreitung seismischer Wellen auf den Vorgang im Herd zurückzuschließen. Es wird auf die Mohrsche Theorie über das Auftreten maximalen Scherungsdrucks zurückgegriffen, woraus folgen würde, daß der Scherungsdruck mit wachsender Herdtiefe sehr große Werte annimmt, was aber anderen Überlegungen, besonders über die Größe der Richtigkeit, widerspricht. Wahrscheinlich erscheinen plastische Deformationen als Folge plötzlicher Scherungsbewegung, wobei große seismische Energie, besonders in Form von transversalen Wellen auftreten würde, die ihrerseits durch Reflexion an Unstetigkeitsflächen longitudinale Wellen erzeugen. *Brockamp.*

Namekawa, Tadao: A theory of the annual variation of temperature of ocean or lake. Mem. Coll. Sci. Kyoto A 18, 239—245 (1935).

Verf. untersucht die vertikale Temperaturverteilung in Ozeanen und ihre zeitliche Änderung im Laufe des Jahres, wozu bisher die fundamentale Differentialgleichung für turbulenten Wärmeaustausch in der bekannten Form

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

(T = absolute Temperatur, k = Austauschkoeffizient) zur Verfügung stand. Da im stationären Zustand im Jahre die gleiche Wärmemenge, die im Sommer nach unten transportiert wird, im Winter wieder nach oben geschafft werden muß, müßte im Winter $\frac{\partial T}{\partial z} > 0$ ($z > 0$ nach unten) erfüllt sein, was im Widerspruch zu den Beobachtungen steht. Der Zustand $\frac{\partial T}{\partial z} > 0$ wird nach Ansicht des Verf. und in Übereinstimmung mit der Beobachtung doch gelegentlich, allerdings wegen seiner Instabilität ($\frac{\partial \rho}{\partial z} < 0$, ρ = Dichte des Wassers) nur immer für kurze Zeit, existieren und mit intensivem nach oben gerichtetem Wärmetransport verbunden sein, so daß die gesamte im Sommer nach unten geschaffte Wärmemenge wieder nach oben transportiert wird, ohne daß im Mittel in der kalten Jahreszeit $\frac{\partial T}{\partial z} > 0$ sein muß. — Diesem Vorgange Rechnung tragend fügt der Verf. auf der rechten Seite der obigen Gleichung ein weiteres für den nach oben gerichteten Wärmetransport bestimmtes Glied hinzu und erhält

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} + \overline{k \frac{\partial T'}{\partial z}} \right).$$

Für $\overline{k \frac{\partial T'}{\partial z}}$ wird ein plausibler Ansatz gemacht und die Gleichung unter Beachtung der Randbedingungen integriert. Zum Schluß wird eine Methode angegeben, um das vorhandene Beobachtungsmaterial mit der durch die Integration gewonnenen Lösung zu vergleichen. Ein durchgeführtes Beispiel zeigt — wenigstens für das erste Glied der Entwicklung — eine gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung.

H. Philipps (Bad Homburg v. d. H.).

Wijk, L. A. van: Galactic rotation and vertical intensity of cosmic rays at the magnetic equator. Physica 3, 769—774 (1936).

Schwandke, Fedor: Die innere Reibung der Atmosphäre in Abhängigkeit von der Luftmasse. Leipzig: Diss. 1935. 39 S. u. 15 Fig.

Es wird untersucht, inwieweit sich eine Abhängigkeit des Reibungskoeffizienten von einer speziellen Luftmasse ergibt. Auf Grund eines graphischen Verfahrens werden für aktive und frische Luftmassen über Hannover die dazugehörigen Reibungskoeffizienten aus den mittleren Windverteilungen in der Höhe bestimmt. Aus der statistischen Verarbeitung ergibt sich, daß die für die beiden Hauptluftmassen charakteristischen Verteilungen der Reibungskoeffizienten in der Höhe im wesentlichen nur durch die verschiedene Struktur der PL und TL bedingt sind; denn es zeigt sich eine deutliche Abhängigkeit zwischen Reibungskoeffizient, Stabilität und Austausch. Erhöhte Stabilität verursacht Abnahme des Reibungskoeffizienten und umgekehrt. Die für Hannover gültigen Verteilungskurven des Reibungskoeffizienten mit der Höhe für die

einzelnen Luftmassen gelten prinzipiell auch für andere Stationen. Sie stellen also Luftmassencharakteristika dar. *Hänsch* (Münster i. W.).

Raethjen, P.: Zeitliche Änderungen der Horizontalwindstärke und Abweichungen vom barischen Windgesetz. Meteorol. Z. 53, 247—251 (1936).

Ausgehend von der hydrodynamischen Grundgleichung wird in einem 1. Absatz: Das Nichtmitwirken der Vertikalkomponente, folgender Energiesatz bewiesen: „Die kinetische Energie der horizontalen Windkomponenten ist insofern unabhängig von allen Vertikalbewegungen, als sie sich nur aus den von den Luftteilchen durchlaufenen horizontalen Druckunterschieden bestimmt.“ In einem 2. Abschnitt werden die Abweichungen vom barischen Windgesetz behandelt, die Arbeit leisten oder verbrauchen. Unter Vernachlässigung der Reibung können die horizontalen Windkomponenten also nur Arbeit gegen das horizontale Druckfeld leisten. Jede Vermehrung oder Verringerung der individuellen horizontalen Windstärke bedingt folglich eine Abweichung vom barischen Windgesetz. In 2 Tabellen werden 1. die Abweichungen des Höhenwindes vom Gradientwind unter 50° Breite und 2. die Abweichungen des Bodenwindes vom barischen Windgesetz unter 50° Breite mitgeteilt. *Hänsch* (Münster i. W.).

Hesselberg, Th.: Gesetzmäßigkeiten in der Windverteilung. Norske Vid. Akad., Geofys. Publ. 11, Nr 9, 1—21 (1936).

Die Windregistrierungen von Aas (Januar und Oktober 1929) werden in der üblichen Weise nach Stunden ausgewertet und nach zwei Achsen (E—W und N—S) in Komponenten zerlegt. Daraus Berechnung von Mittelwerten des Windes, Abweichungen und Mitteln der Abweichungen bzw. ihre Quadrate. Untersucht wird die Verteilung des Windes, zunächst nach Komponenten. Die empirische Häufigkeitsverteilung wird verglichen mit der Maxwellschen Verteilung, die aus denselben Mittelwerten berechnet wird. Resultat: Zu viele Fälle mit kleinen und großen, zu wenig Fälle mit mittleren Abweichungen. Verf. beweist, daß, genau wie früher für die Windunruhe gefunden (Hesselberg und Bjørkdal, Beitr. Physik frei. Atmosph. 1929), die empirische Verteilung erklärt werden kann durch eine Summe von einfachen Maxwell-Verteilungen mit verschiedenen Mittelwerten und verschiedenen Moduln, da ja in den bearbeiteten Monaten naturgemäß verschiedene Hauptwindrichtungen vorkommen, jede mit ihrem besonderen Verteilungsgesetz. Dieser Gedanke wird fortgeführt auch auf das Vektordiagramm des Windes und für verschiedene Darstellungsformen das jeweilige theoretische Verteilungsgesetz abgeleitet und an Hand des empirischen Befundes diskutiert. *Alfred Hofmann* (Bad Homburg).

Hornich, Hans: Über eine Kritik an H. Bruns' Schrift „Die Figur der Erde“. Gerlands Beitr. Geophys. 47, 411—412 (1936).

N. Idelson hat in dem Bericht: „Über die Bestimmung der Figur der Erde aus Schwerkraftmessungen“ (Verh. Balt. geodät. Komm., Helsinki 1935, II. Teil, 9—23; dies. Zbl. 11, 92) einige Entwicklungen in H. Bruns': „Die Figur der Erde“ beanstandet. Verf. gibt an, daß das vermeintliche Versehen von Bruns in Wirklichkeit ein Irrtum Idelsons ist und daß Bruns' Rechnungen in Ordnung sind. Insbesondere wird ausgeführt, daß die Anziehung einer regulären Fläche mit beschränkter und integrierbarer Massendichte auf einen in der Fläche liegenden Aufpunkt unstetig ist, während Idelson behauptet, daß die Anziehung überall stetig ist. *Schmehl* (Potsdam).

Idelson, N.: Erwiderung auf die vorstehenden Kritiken. Gerlands Beitr. Geophys. 47, 413—415 (1936).

Verf. hält H. Hornichs Kritiken für sachlich und historisch falsch, weist sie sämtlich zurück und hält seine in seinem in vorstehendem Referat zitierten Bericht gegebenen Ausführungen voll und ganz aufrecht. *Schmehl* (Potsdam).

Ohlemutz: Beitrag zur Lösung des Vorwärtseinschneidens mit Hilfe von Doppelrechenmaschinen unter Benutzung der Dreieckswinkel. Allg. Vermessgs-Nachr. 48, 413—415 (1936).